Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics

The Union of Czech Mathematicians and Physicists, Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Olomouc 2019

ISSN 2694-8133

Univerzita Palackého v Olomouci
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

ve spolupráci s

Jednotou českých matematiků a fyziků
pobočný spolek Olomouc

Elementary Mathematics Education Journal

ročník 1, číslo 1

2019

Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

in cooperation with

The Union of Czech Mathematicians and Physicists
Olomouc branch

Elementary Mathematics Education Journal

Vol. 1, No. 1

2019

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Vydavatel: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika

Adresa a kontakty:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Informace pro autory:
Časopis uveřejňuje články k aktuálním problémům z teorie elementární matematiky, o inovacích, trendech a výzkumech v primárním a preprimárním matematickém vzdělávání. Jednotlivé články jsou anonymně posuzovány dvěma odborníky v recenzním řízením typu „double-blind peer review“. Další informace a podrobné pokyny pro autory jsou k dispozici na webu: http://emejournal.upol.cz.

Za kvalitu obrázků, jazykovou správnost, dodržení bibliografické normy a dodržování publikační etiky odpovídají autoři jednotlivých článků.

Časopis vychází dvakrát ročně.

Ročník 1, číslo 1

ISSN 2694-8133

Elementary Mathematics Education Journal

http://emejournal.upol.cz

Publisher: Palacký University Olomouc, Faculty of Education, Department of Mathematics
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Address and contacts:
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci
Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Česká republika
emej@upol.cz

Information for authors:
The journal publishes articles on current issues in the theory of elementary mathematics, about innovation, trends and research in primary and pre-primary mathematics education. Each article is reviewed by two anonymous experts ("double-blind peer review"). More information and other instructions for authors are available at: http://emejournal.upol.cz.

The authors of the articles are responsible for the quality of the images, language accuracy, compliance with bibliographic standards and adherence to publication ethics.

The journal is published twice a year.

Vol. 1, No. 1

ISSN 2694-8133

Obsah

Content

Vážení čtenáři,

dostává se k vám první číslo nového časopisu *Elementary Mathematics Education Journal*. Časopis vás bude dvakrát ročně seznamovat s aktuálně řešenými problémy a realizovanými výzkumy z oblasti elementární matematiky a matematické přípravy budoucích učitelů prvního stupně základních škol i mateřských škol.

Časopis vytváří prostor pro publikování teoretických i výzkumných studií zaměřených na pedagogické, didaktické i psychologické aspekty primárního a preprimárního matematického vzdělávání: současné trendy ve výuce matematiky na prvním stupni základní školy, rozvoj matematické gramotnosti a pregramotnosti, problematiku hodnocení a evaluace ve výuce matematiky, rozvoj digitální gramotnosti a s tím související možnosti využívání digitálních technologií ve výuce matematiky a další témata korespondující se zaměřením časopisu.

Vzniku časopisu předcházely roky spolupráce akademických pracovníků a učitelů v praxi při matematické přípravě budoucích učitelů prvního stupně základní školy a učitelů pro mateřské školy. Především se jedná o plodnou spolupráci akademických a výzkumných pracovníků zemí Visegrádské čtyřky, jejichž příslušné instituce jsou uvedeny na úvodní webové stránce časopisu. Všem děkuji za jejich iniciativu, spolupráci a podporu vzniku našeho nového časopisu.

Velké poděkování patří také členům Katedry matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, kteří se podílejí a budou podílet na redakční práci pro časopis, pobočnému spolku Olomouc Jednoty českých matematiků a fyziků za záštitu nad časopisem, všem členům redakční rady za odborný dohled a garanci, všem recenzentům za jejich odborné recenzní posudky a všem autorům a čtenářům za jejich přízeň.

David Nocar
šéfredaktor

Dear readers,

You are now getting the first issue of the *Elementary Mathematics Education Journal*. The journal will inform you twice a year about current issues and realized researches in elementary mathematics and mathematical training of prospective primary school teachers and kindergarten teachers.

The journal creates space for publishing theoretical and research studies focused on pedagogical, didactic and psychological aspects of primary and pre-primary mathematical education: current trends in teaching mathematics at primary school, development of mathematical literacy and preliteracy, assessment and evaluation in mathematics education, development of digital literacy and related possibilities of using digital technologies in mathematics education and other topics corresponding to the journal's focus.

The foundation of the journal was preceded by years of cooperation between academics and teachers in practice during the mathematical training of prospective primary school teachers and kindergarten teachers. Especially, it is a successful cooperation between academics and researchers of the Visegrad Four countries, whose institutions are listed on the homepage of the journal. I thank them all for their initiative, cooperation and support for the creation of our new journal.

Great thanks also to the members of the Department of Mathematics, Faculty of Education, Palacký University Olomouc, who participate in the editorial work for the journal, to the Olomouc branch of the Union of Czech Mathematicians and Physicists for the patronage of the journal, to all members of the editorial board for professional supervision and guarantee, to all reviewers for their expert reviews and to all authors and readers for their favor.

David Nocar
editor-in-chief

ROZVÍJENÍ GEOMETRICKÉ PŘEDSTAVIVOSTI V ÚLOHÁCH

Jaroslav BERÁNEK
Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
beranek@ped.muni.cz

Abstrakt

Hlavním cílem příspěvku je poskytnout náměty k rozvíjení geometrické představivosti studentů programu učitelství pro 1. stupeň základní školy a tím přispět k jejich motivaci k dalšímu studiu matematiky a tím i rozvoji jejich matematických znalostí. Článek obsahuje řadu zajímavých úloh s geometrickou tématikou, vybraných z uplynulých ročníků matematické olympiády v kategorii Z5. Úlohy jsou doplněné řešením i metodickými poznámkami. Snahou je docílit toho, aby se studenti studijního programu učitelství pro 1. stupeň ZŠ začali více zajímat jak o geometrii, tak i o matematickou olympiádu.

Klíčová slova: Matematická olympiáda, geometrická představivost, řešení úloh

DEVELOPMENT OF GEOMETRIC IMAGINATION IN PROBLEMS

Abstract

The main aim of this article is to provide topics which can develop the geometric imagination of future elementary school teachers and thus assist their further motivation and enlargement of their mathematical knowledge. There is given a series of remarkable geometric problems chosen from previous years of Czech Mathematical Olympiad in category Z5. All problems are supplemented with solutions and didactic remarks. The article should inspire future elementary school teachers to be more interested in both geometry and Mathematical Olympiad.

Keywords: Mathematical Olympiad, geometric imagination, solving problems

1. Úvod

Příspěvek je zaměřen na přípravu budoucích učitelů 1. stupně základní školy ve vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“. Obsahuje řadu úloh a problémů, které mohou rozvíjet myšlení studentů v matematice, což následně může vést ke zkvalitnění výuky jejich budoucích žáků. Úlohy jsou tematicky orientovány na geometrii, a to zejména na představivost. Všechny úlohy byly vybrány ze soutěžních úloh starších ročníků matematické olympiády, kategorie Z4 ze Slovenské republiky a kategorie Z5 z České republiky. Úkolem příspěvku není podat podrobný metodický rozbor jednotlivých úloh. Uvádíme jen řešení se stručným komentářem. Dalším důvodem, proč byl sestaven tento příspěvek, je fakt, že mnozí studenti učitelství pro 1. stupeň ZŠ jsou přesvědčeni o tom, že pro kvalitní výuku matematiky stačí znát čtyři základní početní operace a rozpoznat od sebe základní geometrické útvary v rovině a v prostoru. Na uvedených úlohách se pak mohou přesvědčit, že i např. ve 4. ročníku ZŠ se mohou setkat s relativně složitou problematikou a žáci se na ně mohou obrátit s netriviálními dotazy. Všechny úlohy byly převzaty z dostupných webových stránek MO v ČR a SR [6]. Některé z těchto úloh mohou poskytnout i náměty pro další teoretické úvahy. Soubor

ISSN 2694-8133

úloh je doplněn dvěma úlohami, převzatými z publikace určené k přípravě na přijímací zkoušky na VŠ. Poznamenejme ještě, že všechny obrázky v textu jsou rovněž převzaty z příslušných autorských řešení úloh matematické olympiády.

2. Soubor úloh

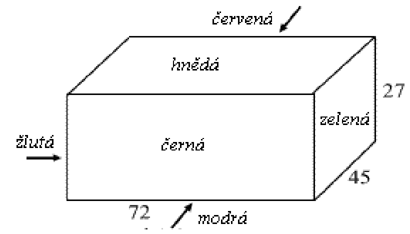
Úloha 1: (45. r. Z4-I-1) Tři cihly ukládáme na sebe různým způsobem. Jaké různé výšky mohou mít tyto stavby? Rozměry jedné cihly jsou: délka 20 cm, šířka 15 cm, výška 7 cm.

Řešení: Jde o zajímavou úlohu, která rozvíjí prostorovou představivost. Žáci mohou využít i manipulativní činnosti, např. pomocí krabiček od zápalek. Výšky staveb mohou být (všechny údaje v centimetrech): 21, 29, 34, 37, 42, 45, 47, 50, 55, 60. Teoretickou podstatou úlohy jsou kombinace třetí třídy s opakováním ze tří čísel 20, 15 a 7.

Úloha 2: (46. r. Z4-I-4) Na vnějších rozích hřiště tvaru čtverce byly umístěné lampy umělého osvětlení. Navrhněte způsob, jak můžeme dvojnásobně zvětšit plochu hřiště (tvar čtverce se má zachovat), aby sloupy zůstaly stát mimo nové hřiště.

Řešení: Teoretickou podstatou úlohy je „klasický“ problém: Je-li dán čtverec o obsahu 1, pak čtverec, jehož vrcholy leží ve středech jeho stran, má obsah 0,5. Lze se o tom přesvědčit nejen výpočtem, ale i graficky, znázorníme-li v původním čtverci i obě úsečky spojující středy protilehlých stran. To je klíčem k této úloze. Každým vrcholem původního hřiště (umístěním lampy) vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou původního hřiště (neobsahující tento vrchol). Průsečíky všech čtyř rovnoběžek budou tvořit vrcholy (rohy) nového hřiště, kde lampy budou umístěny ve středech stran.

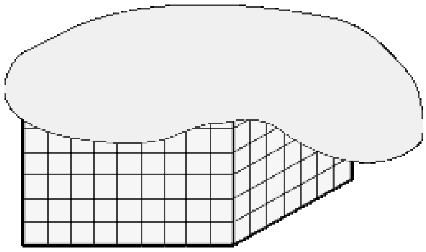
Úloha 3: (48. r. Z4-I-1) Míša měl dřevěný hranolek o rozměrech 27 mm, 45 mm, 72 mm. Každou jeho stěnu natřel jinou barvou tak, jak to vidíš na obrázku 1. Dřív, než barva stačila zaschnout, položil kvádr hnědou stěnou na papír, potom ho překlopil na zelenou stěnu, potom na červenou, na modrou, na žlutou a naposledy na červenou. Nakonec hranolek odložil pryč a prohlédnul si celý obrázek. Jaký obsah má zabarvená část papíru? Jaký má obvod?



Obrázek 1. Barevný hranolek

Řešení: Tato úloha je náročná na prostorovou představivost a žáci zřejmě budou často využívat experimentu. První otázka je jednodušší a lze řešit i úsudkem. Stačí si uvědomit, že dvě protilehlé stěny mají týž obsah; pak snadno odvodíme, že v zabarvené části papíru bude každá ze tří různých stěn kvádru obsažena dvakrát, a tedy obsah zabarvené části je roven povrchu celého kvádru (12 798 mm^2, tj. přibližně 128 cm^2). Při hledání odpovědi na druhou z otázek se již asi bez experimentu neobejdeme. Uvedeme pouze výsledek: obvod zabarvené části papíru je složen z 5 úseček o délce 45 mm, 5 úseček o délce 72 mm a 3 úseček dlouhých 27 mm. Obvod je po výpočtu roven 666 mm.

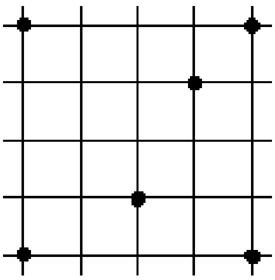
Úloha 4: (48. r. Z4-I-3) Adam má 1638 stejně velkých modrých a bílých krychliček. Ze všech krychliček postavil kvádr, jehož část vidíte na obrázku 2. Přitom všechny krychličky uvnitř jsou bílé a zvenku je celý kvádr modrý. Kolik bílých a kolik modrých krychliček má Adam?



Obrázek 2. Částečně zakrytý kvádr

Řešení: Nejprve je nutné určit počet všech Adamových krychliček. Z obrázku vyčteme, že v podstavě je celkem 63 krychliček („9 × 7“). Protože všech krychliček je 1638, je výška kvádru 26 krychliček. Bílé krychličky jsou všechny vnitřní, tj. „7 × 5 × 24“, tedy po výpočtu 840 krychliček. Zbylé krychličky jsou modré, je jich tedy 798.

Úloha 5*:* (48. r. Z4-I-5) Milan vyznačil na čtverečkovaném papíru 6 bodů (viz obrázek 3):



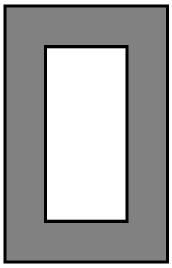
Obrázek 3. Body na čtverečkovaném papíře

Potom začal spojovat vyznačené body úsečkami tak, aby se tyto úsečky neprotínaly. Když už nemohl žádné dva z vyznačených bodů spojit, skončil. Jeho tři kamarádi udělali totéž. Může mít každý z nich jiný obrázek? Nakresli tyto 4 obrázky.

Řešení: Žáci budou zřejmě při řešení této úlohy užívat experimentování a budou „kreslit“ obrázky. Řešení není obtížné, tzn. snadno tyto potřebné 4 obrázky naleznou. Zvolíme-li počátek souřadné soustavy v bodě vlevo dole (bod [0, 0]), mají vyznačené body souřadnice: [0, 4], [2, 1], [3, 3], [4, 0], [4, 4]. Řešení pak lze vyjádřit následujícími trajektoriemi (kreslení obrázků jsme si již odpustili):

[0, 4] → [4, 4] → [4, 0] → [0, 0] → [2, 1] → [3, 3],
[0, 4] → [0, 0] → [4, 0] → [4, 4] → [3, 3] → [2, 1],
[0, 4] → [3, 3] → [4, 4] → [4, 0] → [0, 0] → [2, 1],
[0, 4] → [2, 1] → [3, 3] → [4, 4] → [4, 0] → [0, 0].

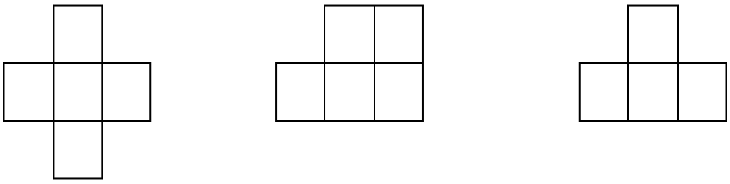
Úloha 6*:* (49. r. Z4-II-1) Ondra a Zuzka dostali společnou maxi-čokoládu. Ondra z ní jedl první a snědl všechny „krajní“ dílky. Zuzce tak zůstalo 15 dílků. Kolik dílků měla maxi-čokoláda? Kdo snědl víc čokolády, Ondra nebo Zuzka? O kolik dílků



Obrázek 4. Maxi-čokoláda

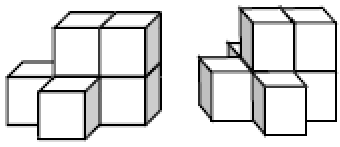
Řešení: Při řešení této úlohy je nutno využít názoru a zkušeností žáků z reálného života, podle nichž je počet dílků v každém řádku i sloupci čokolády vyjádřen přirozeným číslem. Vyjdeme z toho, že Zuzce zbylo 15 dílků. Protože rozklad čísla 15 na prvočinitele je $3 \cdot 5$, existují dvě možnosti: buďto 1 řádek o 15 dílcích nebo 3 řádky o 5 dílcích. Potom celá čokoláda měla buďto 3 řádky o 17 dílcích nebo 5 řádků o 7 dílcích. V prvním případě je celkový počet dílků roven 51, Ondra snědl 36 a Zuzka 15 dílků, ve druhém případě měla celá čokoláda 35 dílků, Ondra snědl 20 a Zuzka 15 dílků. Poznamenejme, že zkušenosti žáků se podstatně projevily v tom, že velká většina uvažovala pouze druhou možnost („čokoláda mající 3 řádky po 17 dílcích neexistuje“).

***Úloha** 7:* (52. r. Z4-I-3) Jirka postavil z dřevěných kostek na stole stavbu a zakreslil, jak jeho stavba vypadá shora, zepředu a zleva (Obr. č. 5). Jeho bratr Ivo stavbu doplnil stejnými kostkami na nejmenší možný kvádr. Kolik dřevěných kostek měl kvádr? Kolik kostek doplnil Ivo?



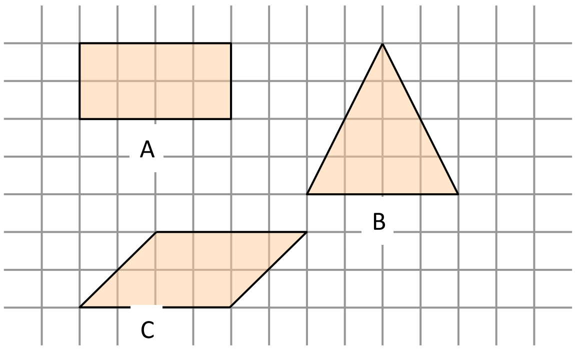
Obrázek. 5. Stavba z kostek (různé pohledy)

Řešení: Žák může situaci modelovat pomocí stavebnice (jde o domácí kolo). Těleso jsme nakreslili v pravém a levém nadhledu, aby bylo viditelné, že je složeno ze sedmi kostek. Podle obrázku měl kvádr 18 kostek a Ivo musel tedy doplnit 11 kostek.



Obrázek 6. Stavba z kostek

***Úloha 8*:** (53. r. Z4-I-4) Pavel rozstříhal obdélník A na obrázku 7 na několik trojúhelníčků. Ze všech těchto trojúhelníčků dokáže poskládat trojúhelník B z obrázku 7 a též ze všech těchto trojúhelníčků dokáže poskládat rovnoběžník C z obrázku 7.



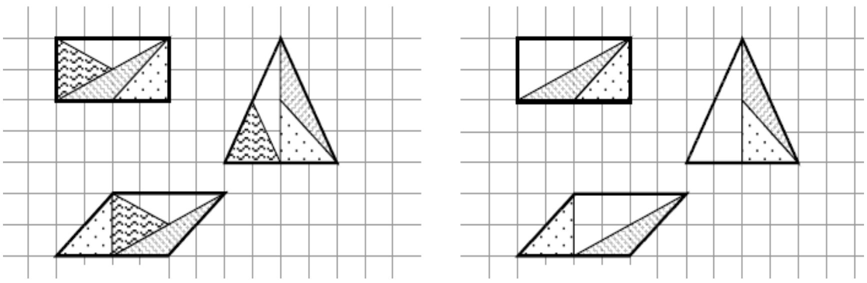
Obrázek 7. Ilustrace k úloze 8

Zjisti, jak Pavel stříhal, když počet trojúhelníčků byl

a) 4,
b) 3.

Vždy nakresli čáry, po kterých mohl Pavel stříhat. Dále nakresli trojúhelník B složený z malých trojúhelníčků i rovnoběžník C složený z malých trojúhelníčků. Při skládání se trojúhelníčky nesmí překrývat, a poskládané útvary nesmí být děravé.

Řešení: Úloha je pro žáky 4. ročníku ZŠ velmi náročná a vyžaduje experimentování pomocí vystřižených útvarů. Důležité je rovněž uvědomit si, že obsahy útvarů z obrázků A, B a C jsou stejné. Jako příprava pro řešení je doporučen tzv. Tangram. Tento historický hlavolam je založený na skládání rozličných útvarů ze základních dílů vzniklých jistým rozstříháním čtverce. Řešení je znázorněno na obrázku. Úloha a) je jednodušší v tom smyslu, že skládání lze provést pouhým posouváním vystřižených trojúhelníčků po podložce. V případě b) je již nutné některé díly převrátit.



Obrázek 8. Řešení úlohy 8

Úloha 9*:* (55. r. Z4-I-3) Pohádkový nafukovací čtverec, který umí vyprávět, měl před pěti minutami délku strany 8cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně. Při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.

a) Jaký největší obvod může mít nyní?
b) Jaký nejmenší obvod může mít nyní?

Řešení: Vypočítejme všechny obvody, které mohl čtverec mít. Písmenem L označíme lež, písmenem P pravdivou informaci. Může nastat celkem 6 případů. Pro učitele poznamenejme, že se jedná o permutace čtvrté třídy ze dvou prvků L, P s opakováním, kdy každý z těchto prvků je v každé čtveřici obsažen dvakrát. Podle vztahu pro počet těchto permutací skutečně platí $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$.

LLPP $(8 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 4 = 112$ cm
LPLP $[(8 \cdot 2 - 2) \cdot 2 - 2] \cdot 4 = 104$ cm
LPPL $(8 \cdot 2 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 4 = 96$ cm
PLLP $[(8 - 2) \cdot 2 \cdot 2 - 2] \cdot 4 = 88$ cm
PLPL $[(8 - 2) \cdot 2 - 2] \cdot 2 \cdot 4 = 80$ cm
PPLL $(8 - 2 - 2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 64$ cm

a) Největší možný obvod je 112 cm.
b) Nejmenší možný obvod je 64 cm.

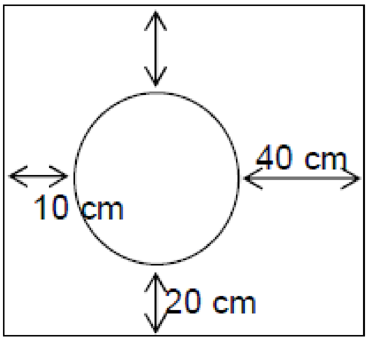
***Úloha 10**:* (55. r. Z4-I-6) Majka má ve stavebnici jen stejně velké krychličky s hranou délky 3 cm. Když z nich postaví věž, která má na každém poschodí 4 krychličky, bude mít věž výšku 54 cm. Jak vysoká by byla jiná věž ze stejného počtu stejných krychliček, která by měla v každém poschodí 9 krychliček?

Řešení: Jestliže má každá krychle hranu délky 3 cm, tak je na výšku naskládaných 54 : 3 = = 18 krychliček. Ve stavebnici jich tedy je $18 \cdot 4 = 72$. Jestliže budeme do každého poschodí dávat po 9 krychlích, bude mít věž 72 : 9 = 8 poschodí. Její výška proto bude $8 \cdot 3 = 24$ cm.

***Úloha 11**:* (58. r. Z4-I-1) Na stole se čtvercovou deskou o straně délky 1 m byla „trochu nakřivo“ umístěna kruhová dečka. Od nejbližší strany desky stolu byl její kraj vzdálený 10 cm, od sousední strany potom 20 cm a od nejvzdálenější strany 40 cm.

a) Jak daleko byl okraj dečky od čtvrté strany desky stolu?
b) Jaký poloměr měla dečka?

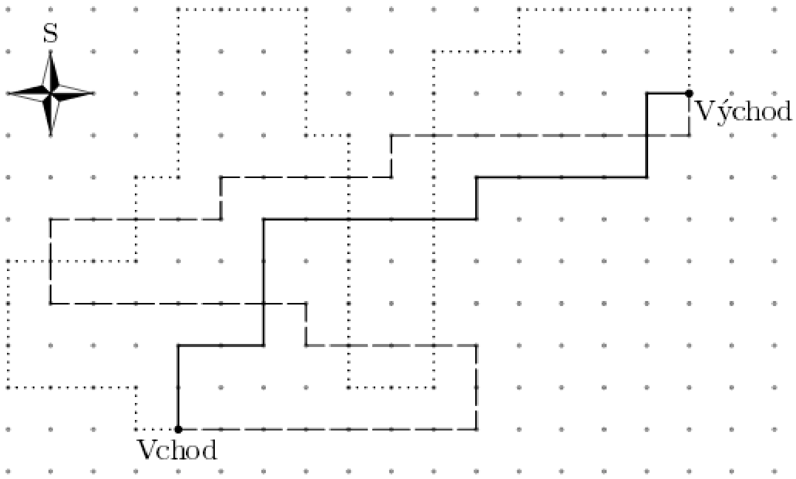
Řešení: Nejdůležitější je myšlenka „rozprostření“ dečky na stůl a uvědomění si, co je vzdálenost od okraje. Předpokládáme, že si žáci nakreslí následující obrázek 9:



Obrázek 9. Stůl s kruhovou dečkou.

Délka hrany stolu je 100 cm. Ve vodorovném směru máme rozměry 10 cm, 40 cm a průměr dečky. Proto průměr dečky bude 100 cm − 10 cm − 40 cm = 50 cm. Ve svislém směru máme na obrázku 20 cm, průměr dečky a neznámý rozměr. Z obrázku vyjádříme, že poslední neznámý rozměr musí byť 30 cm. Od čtvrté strany stolu je dečka vzdálená 30 cm, poloměr dečky je tedy 25 cm.

Úloha 12: (Z5–I–1, 61. r.) Tři kamarádi Pankrác, Servác a Bonifác šli o prázdninách na noční procházku přírodním labyrintem. U vstupu dostal každý svíčku a vydali se různými směry. Všichni labyrintem úspěšně prošli, ale každý šel jinou cestou. V následující čtvercové síti jsou vyznačeny jejich cesty. Víme, že Pankrác nikdy nešel na jih a že Servác nikdy nešel na západ. Kolik metrů ušel v labyrintu Bonifác, když Pankrác ušel přesně 500 m?



Obrázek 10. Labyrint

Řešení: Nejdříve určíme, kterými cestami šli jednotliví kamarádi. K tomu potřebujeme vědět, na které světové strany vedou jednotlivé cesty. Cesta podle plné čáry vede pouze na sever a na východ. Čárkovaná cesta vede na sever, východ a západ. Tečkovaná cesta míří postupně na všechny světové strany. Jediná cesta, která nevede nikdy západním směrem, je ta vyznačená plnou čárou — patří tedy Servácovi. Tudy Bonifác jistě nešel. Ze zbylých dvou cest na jih nemíří ta čárkovaná — po ní tedy šel Pankrác. Takže Bonifác musel jít po tečkované čáře. Pankrác ušel 500m. Nyní spočítáme, po kolika úsečkách (tj. stranách čtverečku čtvercové sítě) šel:

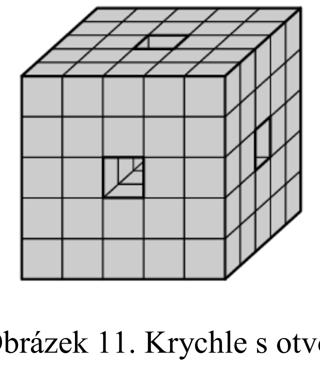
7(východ) + 2(sever) + 4(západ) + 1(sever) + 6(západ) + 2(sever) +4(východ) + 1(sever) + + 4(východ) + 1(sever) + 7(východ) + 1(sever) = 40.

Teď ještě určíme, po kolika úsečkách šel Bonifác:

1(západ) + 1(sever) + 3(západ) + 3(sever) + 3(východ) + 2(sever) + +1(východ) + 4(sever) + + 3(východ) + 3(jih) + 1(východ) + 6(jih) + 2(východ) + 8(sever) + 2(východ) + 1(sever) + + 4(východ) + 2(jih) = 50.

Jestliže 40 úseček měří 500 m, pak 10 úseček měří 500 : 4 = 125 (m). Takže 50 úseček měří 500 + + 125 = 625 (m). Bonifác ušel v labyrintu 625 metrů.

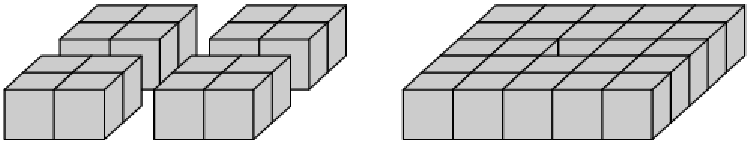
Úloha 13: (Z5–I–4, 61. r.) Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Z kolika kostiček je stavba slepena?



Obrázek 11. Krychle s otvory

ISSN 2694-8133

Řešení: Stavbu rozdělíme čtyřmi vodorovnými řezy na pět vrstev. Prostřední vrstva je na obrázku vlevo, skládá se z 16 kostiček. Ostatní čtyři vrstvy vypadají všechny tak, jak ukazuje obrázek vpravo, a každá z nich se skládá z 24 kostiček. Na celou stavbu bylo použito $16 + 4 \cdot 24 = 112$ kostiček.

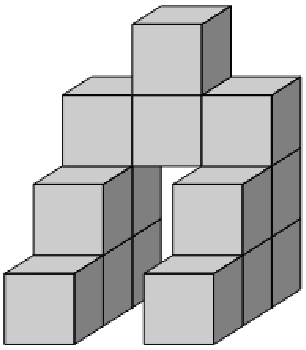


Obrázek 12. Řešení úlohy 13

Jiný nápad. Kolik kostiček chybí v tunelech?

Jiné řešení. Představme si, že stavba byla zhotovena bez „tunelů“ a ty byly proraženy až dodatečně. Původně se tedy skládala z $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kostiček. Proražením prvního tunelu stavba ztratila 5 kostiček, proražením dalších dvou tunelů ztratila po 4 kostičkách. Konečný počet kostiček tedy je $125 - 5 - 4 - 4 = 112$.

Úloha 14**:** (Z5–II–2, 62. r.) Na obrázku je stavba slepená ze 14 stejných krychliček. Stavbu chceme ze všech stran obarvit, tedy i zespodu. Jaká bude spotřeba barvy, když 10 ml barvy stačí na natření jedné celé krychličky?



Obrázek 13. Stavba ze 14 krychlí.

Možné řešení. Je šest různých směrů, jak se na stavbu, respektive na jednotlivé krychličky stavby, dívat. Pro každý směr spočítáme, kolik stěn krychliček bude potřeba natřít:

- Když se na obrázek podíváme shora, vidíme právě 7 stěn, které bude třeba natřít. Stejný počet napočítáme při pohledu zdola.
- Při pohledu zepředu vidíme celkem 8 stěn. Stejný počet napočítáme při pohledu zezadu.
- Při pohledu zleva vidíme 7 stěn, ale bude potřeba obarvit ještě dalších 5 stěn, které jsou zakryté - jedná se o krychličky v pravém pilíři stavby. Celkem jsme napočítali 12 stěn. Při pohledu zprava je situace stejná.
  Celkem tedy potřebujeme natřít $2 \cdot (7 + 8 + 12) = 2 \cdot 27 = 54$ stěn, což je stejné jako natřít 9 celých krychliček ($9 \cdot 6 = 54$). K natření jedné celé krychličky je potřeba 10 ml barvy, tudíž celkem potřebujeme $9 \cdot 10 = 90$ (ml) barvy.

Jiné řešení. Můžeme postupně probrat všechny krychličky ve stavbě a určit, kolik jejích stěn budeme natírat. Postupujeme po vrstvách shora dolů, v každé vrstvě po řadách zepředu dozadu, v každé řadě zleva doprava:

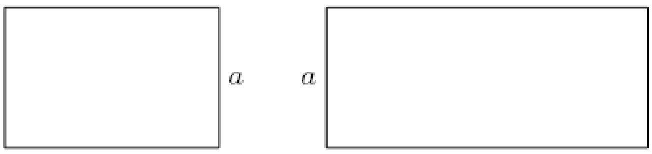
- V 1. vrstvě je jediná krychlička, u níž budeme natírat 5 stěn.
- Ve 2. vrstvě jsou tři krychličky – počítáme postupně 4 + 3 + 4 = 11 stěn.
- Ve 3. vrstvě jsou čtyři krychličky – počítáme postupně 4 + 4 + 3 + 3 = 14 stěn.
- Ve 4. vrstvě je šest krychliček – počítáme postupně 5 + 5 + 3 + 3 + 4 + 4 = 24 stěn.

Celkem tedy potřebujeme natřít 5 + 11 + 14 + 24 = 54 stěn. Další postup může být stejný jako v předchozím řešení.

Úloha 15: (Z5–II–2, 63. r.) Libor rozdělil obdélník jednou čarou na dva menší obdélníky. Obvod velkého obdélníku je 76 cm, obvody menších obdélníků jsou 40 cm a 52 cm. Určete rozměry velkého obdélníku.

Obrázek 14. Ilustrace k úloze 15

Řešení: Společnou stranu dvou menších obdélníků označíme a tyto dva obdélníky překreslíme oddělené od sebe.



Obrázek 15. Řešení úlohy 15

Součet obvodů dvou menších obdélníků je 40 + 52 = 92 (cm), což je o 16 cm více než obvod původního obdélníku, neboť 92 − 76 = 16. Těchto 16 cm odpovídá dvěma stranám *a*, strana *a* má proto délku 16 : 2 = 8 (cm).

Stejnou délku mají i dvě strany původního obdélníku, součet délek jeho zbylých dvou stran je 76 − 2 · 8 = 60 (cm), každá z nich je tedy dlouhá 60 : 2 = 30 (cm). Rozměry původního velkého obdélníku jsou 30 cm a 8 cm.

Úloha 16: (Moll 2009, s. 95) Součet stran trojúhelníka ABC je 10 cm. Strana AB má stejnou délku jako strany AC a BC dohromady. Strana BC je třikrát delší než strana AC. Určete délky stran trojúhelníka ABC.

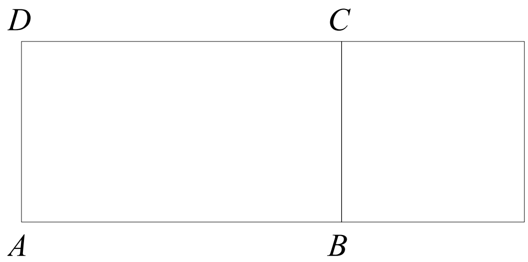
Řešení: Úloha je pozoruhodná tím, že odpověď je negativní, tzn. takový trojúhelník neexistuje. Zajímavé je rovněž to, že při řešení je nutno využít trojúhelníkovou nerovnost. Označíme-li délky stran klasicky *a, b, c*, pak podle zadání platí soustava rovnic

$$c = a + b$$
$$a = 3b$$
$$a + b + c = 10$$

ISSN 2694-8133

Tato soustava sice řešení má (3,75; 1,25, 5), ale první z rovnic nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost.

Úloha 17: (Moll 2009, s. 95) K pozemku tvaru obdélníka ABCD byl přidán čtvercový pozemek nad stranou BC původního pozemku. Zvětšený pozemek má obvod 100 m. Strana přidaného čtverce má délku 16 m. Určete rozměry původního pozemku.



Obrázek 16. Zvětšení pozemku z úlohy 17

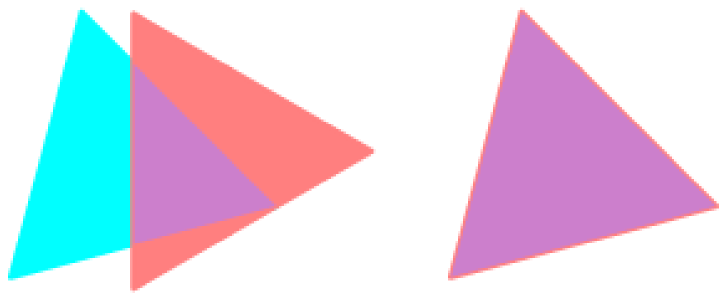
Řešení: Spočívá ve vhodném označení. Označíme-li rozměry původního pozemku *a, b*, pak přímo ze zadání plyne $b = 16$. Strana prodlouženého pozemku má nyní délku $a + 16$. Ze zadání platí vztah $2.(a+16) + 2.16 = 100$, odkud plyne $a = 18$.

***Úloha 18*:** (Z5–I–2, 63. r.) Vojta má dvě stejná sklíčka tvaru rovnostranného trojúhelníku, která se liší pouze svou barvou — jedno je červené, druhé modré. Pokud se sklíčka položí přes sebe, vznikne útvar fialové barvy. Udejte příklad překrývání sklíček, při kterém mohl Vojta dostat:

a) fialový trojúhelník,
b) fialový čtyřúhelník,
c) fialový pětiúhelník,
d) fialový šestiúhelník.

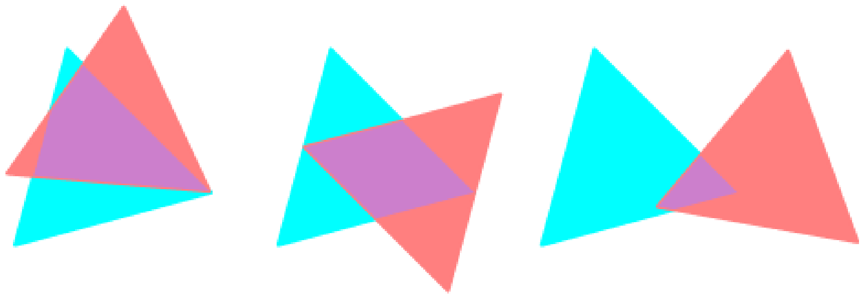
Řešení: Každý z fialových mnohoúhelníků lze realizovat mnoha různými způsoby; uvádíme několik možných příkladů.

a) fialový trojúhelník:



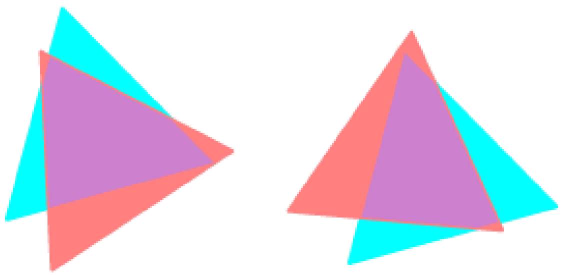
Obrázek 17. Trojúhelníky – možná řešení

b) fialový čtyřúhelník:



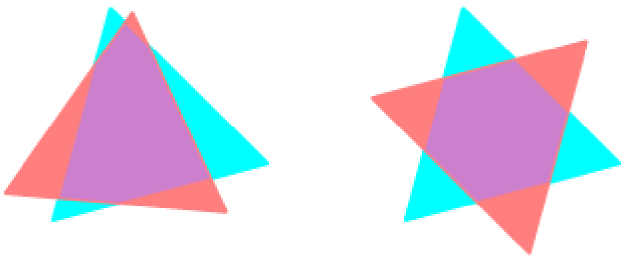
Obrázek 18. Čtyřúhelníky – možná řešení

c) fialový pětiúhelník:



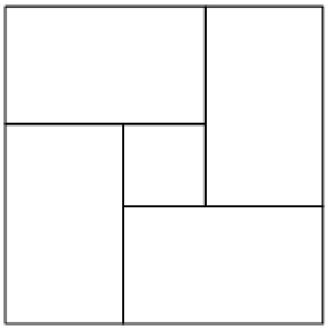
Obrázek 19. Pětiúhelníky – možná řešení

d) fialový šestiúhelník:



Obrázek 20. Šestiúhelníky – možná řešení

Úloha 19: (Z5–I–3, 66. r.) Na obrázku 19 je čtvercová dlaždice se stranou délky 10dm, která je složena ze čtyř shodných obdélníků a malého čtverce. Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod celé dlaždice. Určete rozměry obdélníků.



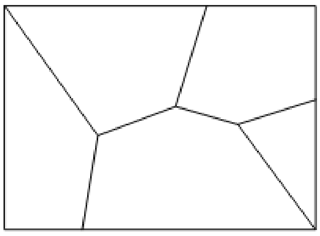
Obrázek 21. Dlaždice z úlohy 19

Řešení: Obvod malého čtverce je pětkrát menší než obvod dlaždice, proto i jeho strana je pětkrát menší než strana dlaždice. Strana malého čtverce tedy měří 10 : 5 = 2 (dm). Přitom délka strany dlaždice je rovna součtu délek strany malého čtverce a dvou kratších stran obdélníku. Kratší strana obdélníku tedy měří (10 − 2) : 2 = 4 (dm). Současně délka strany dlaždice je rovna součtu délek kratší a delší strany obdélníku. Delší strana obdélníku tedy měří 10 − 4 = 6 (dm). Rozměry obdélníků jsou 4 dm × 6 dm.

Úloha 20: (Z5–II–1, 67. r.) Na obrázku 24 je znázorněno pět výběhů části zoo. Každý výběh obývá jeden z pěti druhů zvířat. Přitom víme, že

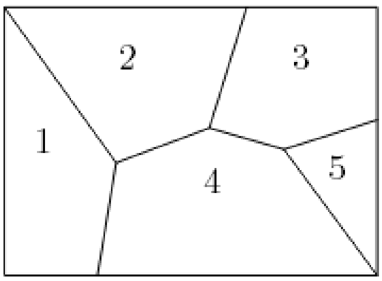
- výběh žiraf má pět stran,
- výběh opic nesousedí ani s výběhem nosorožců, ani s výběhem žiraf,
- výběh lvů má stejný počet stran jako výběh opic,
- ve výběhu tuleňů je bazén.

Určete, která zvířata jsou ve kterém výběhu.



Obrázek 22. Plán ZOO - pět výběhů

Řešení: Označme jednotlivé výběhy číslicemi jako na obrázku 25:



Obrázek 23. Označení výběhů

Podle první informace jsou žirafy buď ve výběhu 3, nebo 4. Podle druhé informace víme, že výběh žiraf nemá sousedit s výběhem opic. Výběh 4 však sousedí se všemi ostatními výběhy, proto musí být žirafy ve výběhu 3. Jediný výběh, který s výběhem žiraf nesousedí, je výběh 1. Podle druhé informace musí být ve výběhu 1 opice. Kromě výběhu žiraf nesousedí s výběhem opic už jenom výběh 5. Podle druhé informace musí být ve výběhu 5 nosorožci. Jediný výběh, který má stejný počet stran jako výběh opic, je výběh 2. Podle třetí informace musí být ve výběhu 3 lvi. Zbývá jediný neobsazený výběh, a to výběh 4. Tuleni jsou tedy ve výběhu 4.

3. Závěr

V příspěvku jsme uvedli celkem 20 úloh z matematické olympiády v ČR a SR, kategorie týkající se 1. stupně základní školy. Tyto úlohy, vzhledem k jejich zařazení převážně do domácího kola, mohou dále na žáky působit i výchovně (rozvoj trpělivosti, systematičnost v práci apod.). Hlavním cílem bylo připomenout, že matematické soutěže existují i na 1. stupni ZŠ, mají zde své opodstatnění, a proto by učitelé měli úlohy z matematických soutěží do výuky zařazovat a využívat a rovněž žáky k účasti v matematických soutěžích motivovat.

Literatura

Beránek, J. (2009). Školní matematické soutěže – řešení zajímavých úloh. In: *Setkání učitelů matematiky II - Matematika a hry* (10 s.). Brno: Pedagogická fakulta MU.

Kouřim, J., Šedivý, O. & Kuřina, F. (1985). *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Matematická olympiáda v ČR, 61. až 67. ročník [online]. [cit. 2019-01-21]. Dostupné z http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly

Matematická olympiáda v SR [online]. [cit. 2019-01-23]. Dostupné z http://www.gljs.sk/mo/.

Moll, P. & Mezník, I. (2009). *Příručka pro přípravu k přijímacím zkouškám na bakalářské studijní programy.* Brno: VUT Brno, CERM.

Půlpán, Z., Kuřina, F. & Kebza, V. (1992). *O představivosti a její úloze v matematice*. Praha: Academia.

ISSN 2694-8133

TYPICKÉ PŘÍSTUPY A CHYBY NADANÝCH ŽÁKŮ 1. STUPNĚ PŘI ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ÚLOH

Irena BUDÍNOVÁ
Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
irena.budinova@seznam.cz

Abstrakt

Článek se zabývá řešitelskými strategiemi žáků 4. a 5. ročníku základní školy u úloh, které jsou řešitelné rovnicemi. Tyto úlohy mohou být řešeny aritmeticky i algebraicky. V příspěvku jsou uvedeny způsoby řešení těchto úloh nadanými žáky a některé frekventované chyby.

Klíčová slova: slovní úlohy, nadaní žáci, strategie řešení

TYPICAL APPROACHES AND ERRORS OF GIFTED ELEMENTARY SCHOOL PUPILS WHEN SOLVING ALGEBRAIC TASKS

Abstract

The paper deals with the solving strategies of gifted fourth and fifth graders at primary schools while solving word problems that can be solved by equations. These word problems can be solved in both arithmetic and algebraic way. The ways of solving tasks by gifted pupils and some of the frequent mistakes are the focus of this paper.

Keywords: word problem, gifted pupils, solving strategies

1. Úvod

V roce 2013 byl ve spolupráci s Pedagogickou fakultou MU veden na základních školách matematický kroužek, který byl primárně určen pro nadané žáky 4. a 5. ročníku. Byly osloveny vybrané školy Jihomoravského kraje. Podmínkou toho, aby se škola mohla do projektu zapojit, bylo, že na 1. stupni je alespoň jeden nadaný žák, diagnostikovaný odborným pracovištěm. Všichni odborně identifikovaní žáci[1] daných ročníků navštěvovali kroužek, možnost zapojit se do kroužku byla rovněž dána dalším žákům. Celkem se do matematického kroužku zapojilo 14 škol a 135 žáků.

Žáci navštěvovali kroužek ve své škole jedenkrát týdně po dobu osmi týdnů. Celkově bylo zadáno 63 úloh, které se týkaly všech témat školské matematiky a dále kombinatoriky a teorie grafů. Některé z úloh byly motivační, vycházely ze základního učiva (pro nenadané žáky, kteří neměli rozvinuté matematické myšlení), jiné úlohy byly školsky netypické.

[1] Identifikace nadaných žáků je komplexní a dlouhodobá záležitost, na které se podílejí rodiče, učitel, pedagogicko-psychologická poradna a dítě. Více informací na http://www.nuv.cz/uploads/rovne_prilezitosti_ve_vzdelavani/nadani/diagnostika/standard_diagnostiky_mn_2016_12_09.pdf

ISSN 2694-8133

Školy dostávaly každý týden jeden pracovní list s osmi (jednou se sedmi) úlohami (Blažková & Budínová, 2014). Na vypracování jednoho pracovního listu měli žáci dostat 45 minut, po skončení měla proběhnout diskuze s učitelem.

Mezi úlohami se pravidelně objevovaly také úlohy rovnicového charakteru různé náročnosti. Ve výzkumném šetření jsem se zaměřila právě na tyto úlohy.

Článek stručně pojednává o řešení úloh rovnicového charakteru a uvádí některé výsledky výzkumu.

2. Úlohy rovnicového charakteru a způsoby jejich řešení

Pojem **úloha rovnicového charakteru** použil již Hejný (1990) pro úlohy, které je možné úplně vyřešit tak, že se vymodelují rovnicí, nebo úlohy, ve kterých je řešení rovnice pouze součástí širšího myšlenkového procesu řešení úlohy. Úlohu rovnicového charakteru (tj. úlohu, která je řešitelná algebraicky) je obvykle možné řešit různými strategiemi. Ty můžeme rozdělit na **aritmetické** a **algebraické**. Aritmetické strategie dělíme dále dle míry sofistikovanosti na **experimentální** a **neexperimentální**. Experimentování má mnoho různých podob, v základním dělení rozlišujeme **neřízený** a **řízený experiment**. Aritmetické strategie mohou mít řadu různých forem, v závislosti na typu úlohy a rovněž na způsobu vizualizace vztahů.

Nejjednodušší, nejméně sofistikovanou a na matematický aparát nejméně náročnou je strategie **neřízeného experimentu**, která bývá také označována jako **metoda pokusu a omylu**. Žáci se snaží najít řešení slovní úlohy tak, že odhadnou výsledek. Podle Novotné (2000) může mít tento postup tři různé průběhy: 1) řešitel uvede odhadnutý výsledek za řešení slovní úlohy, neprovádí zkoušku správnosti; 2) řešitel provede zkoušku správnosti, která mu potvrdí správnost výsledku – buď hledá další řešení, obvykle jinou strategií, nebo další řešení nehledá; 3) řešitel provede zkoušku správnosti a odhalí, že jeho řešení nevyhovuje zadání úlohy – dále buď řešení vzdá, nebo se ho snaží hledat jinou strategií.

Jiný pohled na strategii pokusu a omylu má Hejný (2014). Dělí ji na náhodnou, částečně organizovanou, organizovanou. Při volbě této strategie žákovi dle něj ulehčí počítání, když si sestaví tabulku, ve které může sledovat vztahy mezi veličinami. Tím se z pokusu a omylu může stát řízené (systematické) experimentování.

Řízený experiment je strategie, která po řešiteli vyžaduje větší zkušenost a cílevědomější vyhodnocování získaných výsledků. Žák vyhodnocuje přesnost svého odhadu a postupně se přibližuje ke správnému výsledku.

Aritmetické strategie jsou takové, kdy není pro řešení použita rovnice. Žák hledá vztahy mezi zadanými údaji a volí vhodné operace k výpočtu neznámých hodnot. Vztahy mezi veličinami je také možné znázornit graficky, pak se strategie nazývá **grafická**, případně aritmetická s grafickým znázorněním. Při **algebraické strategii** řešitel při řešení úlohy používá jednu nebo více rovnic.

3. Cíl a výzkumné otázky

Cílem výzkumného šetření bylo zjistit, v jakých úlohách rovnicového charakteru budou žáci nadaní[2] úspěšnější než žáci, kteří jako nadaní nebyli identifikováni, ale účastnili se výše zmíněného kroužku. Dalším cílem bylo zjistit, zda nadaní žáci preferují určitý přístup k řešení těchto úloh, zda se u nich projeví nějaké opakující se fenomény a zda lze nalézt souvislost mezi typem nadání žáka a strategiemi, které preferuje.

[2] Nadanými žáky budu označovat ty, kteří byli odborně identifikováni v PPP.

ISSN 2694-8133

Položila jsem si následující výzkumné otázky:

- Budou v řešení vybraných úloh nadaní žáci úspěšnější než ostatní?
- Bude mezi úlohami taková, v níž budou nadaní žáci výrazně úspěšnější než nenadaní žáci?
- Které řešitelské strategie budou nadaní žáci preferovat?

Dále jsem zpracovala výsledky statisticky a vyslovila jsem následující hypotézu, vztahující se ke každé úloze zvlášť:
Nadaní žáci budou v řešení dané úlohy statisticky významně úspěšnější než nenadaní žáci.

4. Výzkumný vzorek

Kroužek zmíněný v úvodu kapitoly probíhal ve dvou bězích, v každém běhu se účastnily jiné školy a jiní žáci. Celkem se kurzů účastnilo 14 škol, dvě v obou bězích. Prvního běhu se účastnilo celkem 55 žáků a druhého 80 žáků. Jako nadaní byli označeni ti žáci, kteří byli pedagogicko-psychologickou poradnou diagnostikováni jako nadaní – všeobecně, matematicky, nebo i jinak. V prvním běhu se účastnilo 17 nadaných žáků 4. ročníku a 15 nadaných žáků 5. ročníku. Ve druhém běhu se účastnilo 22 nadaných žáků 4. ročníku a 16 nadaných žáků 5. ročníku. Navštěvovat kroužek bylo umožněno i žákům, kteří nebyli diagnostikováni v PPP, a to na základě jejich zájmu. V dalším textu je budu označovat jako nediagnostikované, protože je pravděpodobné, že někteří z nich byli také nadaní, pouze nebyli identifikováni.

Počty všech zúčastněných žáků jsou uvedeny v Tabulce 1. V jednotlivých týdnech se počty žáků řešících dané úlohy mohou lišit, neboť někteří žáci byli nemocní nebo se neúčastnili kroužku v daném týdnu z jiného důvodu.

Tabulka 1. Počty žáků účastnících se matematického kroužku

	1. běh			**2. běh**		
	4. ročník	**5. ročník**	**Celkem**	**4. ročník**	**5. ročník**	**Celkem**
Nadaní	**17**	**15**	**32**	**22**	**16**	**38**
Ostatní	**14**	**9**	**23**	**21**	**21**	**42**
Celkem	**31**	**24**	**55**	**43**	**37**	**80**

Výsledky jsem zaznamenávala zvlášť pro nadané a ostatní, poté jsem ještě analyzovala výsledky matematicky nadaných žáků, neboť matematické nadání by teoreticky mělo být nejlepším předpokladem k úspěšnému řešení úloh v matematice.

Rodiče všech žáků, kteří byli zapojeni do výzkumu, podepsali informovaný souhlas s testováním dítěte a použitím jeho výsledků pro výzkumné záměry.

5. Výběr a charakteristika úloh

Úlohy, které jsem vybrala pro výzkum, byly rovnicového charakteru. Nyní uvedu jejich znění a stručnou charakteristiku:

1. *Myslím si číslo. Když je vynásobím 5 a odečtu 25, dostanu 100. Které číslo si myslím?* (Aritmetická úloha vedoucí ke dvojkrokové rovnici.)

2. *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?* (Aritmetická úloha vedoucí k trojkrokové rovnici.)
3. *Roman říká: „Aby mi bylo sto let, musel bych žít ještě devětkrát tak dlouho, než jsem doposud žil, a ještě 10 roků.“ Kolik je mu roků?* (Dynamická slovní úloha.)
4. *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?* (Slovní úloha s dělením celku na nestejné části.)
5. *Kapr váží 2 kilogramy, a ještě půl kapra. Kolik kilogramů váží celý kapr?* (Problémová úloha.)

Zajímavé výsledky z hlediska odlišený nadaných a nediagnostikovaných žáků se objevily u úloh 2 a 4. Nyní se proto na tyto dvě úlohy podrobněji zaměřím.

6. Analýza úloh a priori

Ad 2. Zadání lze přepsat do matematického zápisu $[(\_\_ + 7): 3] \cdot 5 = 45$. Je možné postupovat aritmeticky. Zaměříme se na číslo 45, které je možné napsat v součinovém tvaru jako $9 \cdot 5 = 45$. V hranaté závorce je tedy číslo 9, které získáme, když 27 vydělíme třemi. Neznámé číslo tedy musí být 20. Pro žáky je dovednost vnímat čísla v součinovém či součtovém tvaru podstatná a při řešení rovnic může usnadňovat výpočty.

Další aritmetický postup je pomocí metody od konce: $45 : 5 = 9, 9 \cdot 3 = 27, 27 - 7 = 20$.

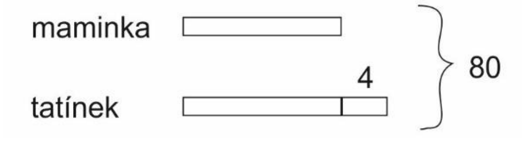
Úlohu můžeme řešit i algebraicky sestavením rovnice $[(x + 7): 3] \cdot 5 = 45$. Pomocí formálních operací by se rovnice řešila ve třech krocích:

$$[(x + 7): 3] = 45 : 5$$
$$(x + 7) = 9 \cdot 3$$
$$x = 27 - 7$$

Hledané číslo je 20. Prověříme správnost dosazením do zadání: $20 + 7 = 27$, $27 : 3 = 9$, $9 \cdot 5 = 45$.

Ad 4. Jedná se o dělení celku na nestejné části. V zadání je obsažen operátor porovnání, přičemž neznáme věk ani jednoho z rodičů. Tím je úloha pro žáky 1. stupně netypická a náročná. Úlohu je možné řešit tak, že 80 vydělíme dvěma. Pokud by rodiče byli stejně staří, měli by 40 let. Jestliže tatínek je o 4 roky starší než maminka, musíme mamince 2 roky ubrat a tatínkovi tyto 2 roky přidat. Mamince je tedy 38 let a tatínkovi 42.

Úlohu můžeme také řešit pomocí úsečkového modelu, ze kterého vyčteme aritmetické vztahy:



Platí: $80 - 4 = 76$, $76 : 2 = 38$, $38 + 4 = 42$. Mamince je 38 let a tatínkovi 42.

Novotná (1997) uvádí, že ze dvou výše zmíněných postupů, tj. $80 : 2 = 40, 40 - 2 = 38, 40 + 2 = 42$ a $80 - 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42$, je druhý postup univerzálněji využitelný, lze jej zobecnit i pro dělení celku na více než dvě části. První postup je navíc rizikovější z hlediska udělání chyby, kdy žáci inklinují k nesprávnému výpočtu $80 : 2 = 40, 40 - 4 = 36, 40 + 4 = 44$.

Algebraicky lze úlohu řešit rovnicí $x + (x + 4) = 80$, kde neznámá x je věk maminky, nebo soustavou rovnic $x + y = 80, y = x + 4$, kde x značí věk maminky a y věk tatínka.

Provedeme zkoušku slovní úlohy: $38 + 42 = 80, 42 - 4 = 38$.

U každé z uvedených úloh lze sledovat linii řešitelských strategií *experiment → aritmetické strategie → algebraické strategie*. V tomto směru jsem rovněž posuzovala sofistikovanost použitých strategií. Na matematické znalosti a dovednosti je nejméně náročná a také nejméně sofistikovaná experimentální strategie, za nejsofistikovanější lze považovat algebraické strategie (ovšem za předpokladu, že žák chápe, co provádí, a nemá jen naučenou sekvenci kroků pro určité typy úloh). Také v rámci jednotlivých kategorií se sofistikovanost řešení může lišit. Například u aritmetické metody jsem jako sofistikovanější chápala ty strategie, které více souvisejí se způsobem řešení rovnice, jako jsou šipkové diagramy, postup od konce či úsečkový diagram, nežli početní postupy, jako je třeba rozklad čísla na součin (viz úloha 2).

7. Analýza dat

Písemná řešení žáků jsem analyzovala z hlediska použitých metod řešení a chyb, kterých se žáci dopouštěli. Přitom jsem si všímala i částí řešení, které byly škrtnuty, pokud mi poskytly vhled do žákova uvažování. Žáci dostali pokyn, aby zapsali i postup řešení, nejen výsledky, a většinou tak činili.

Výsledky analýz žákovských řešení jsem dávala do souvislostí s písemnými záznamy učitelů. Jak jsem již uvedla, ne všichni učitelé respektovali pokyn, aby s žáky diskutovali o jejich metodách řešení. Z 16 zapojených učitelů komentovalo průběh řešení 7, z toho 2 učitelé podávali záznamy velmi podrobné (popsali osobnost každého žáka, jeho projevy při řešení, jak se vyrovnával s tím, že nemůže objevit řešení, na co se v průběhu řešení ptal, jak reagoval v následné diskusi), ostatních 5 učitelů poskytovalo výpovědi stručné (např. pouze zapsali, když žák položil nějakou neočekávanou otázku). Žáci se v pracovním listu vyjadřovali k náročnosti úloh a v rámci diskuse s učitelem mělo být také rozebráno, které úlohy se jim jevily náročné a proč.

U každé úlohy jsem sledovala, zda existuje statisticky významný rozdíl mezi výsledky žáků nadaných a nediagnostikovaných. Na hladině významnosti 0,05 byla testována nulová hypotéza H_0: *Úspěch v úloze X a nadání spolu nesouvisí* proti alternativní hypotéze H_1: *Úspěch v úloze X a nadání spolu souvisí* pro žáky 4. a 5. ročníku zvlášť i pro obě skupiny dohromady. Byl použit chí-kvadrát[3] testu nezávislosti. V případě, že nebyly splněny podmínky dobré aproximace, byl použit Fisherův přesný test.

Žáci u každé úlohy dokreslovali smajlíky podle toho, jak se jim úloha líbila. Oblibu úloh dle smajlíku jsem vyhodnocovala, protože ale tyto výsledky nejsou pro práci podstatné, nebudu se jimi zabývat.

8. Výsledky

Úloha 2: *Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?*

Souhrnné výsledky úspěšnosti jsou uvedeny v Tabulce 2 a použité strategie v Tabulce 3.

[3] Jedná se o test významnosti, který ověřuje, zda se četnosti, které byly získány měřením v pedagogické realitě, odlišují od teoretických četností, které odpovídají dané nulové hypotéze.

Tabulka 2. Úspěšnost, úloha 2

	Počet žáků			**Úspěšnost**		
	Celkem	**4. ročník**	**5. ročník**	**Celkem**	**4. ročník**	**5. ročník**
Nadaní	**36**	**21**	**15**	**32 (89 %)**	**17 (81 %)**	**15 (100 %)**
Ostatní	**37**	**18**	**19**	**28 (76 %)**	**14 (78 %)**	**14 (74 %)**

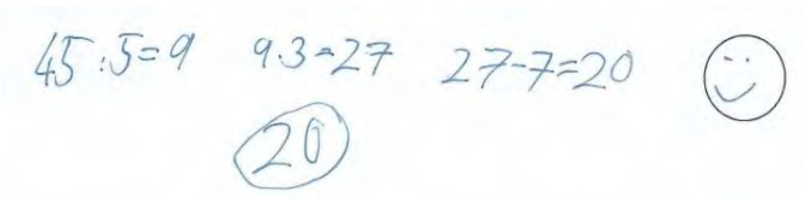
Při pohledu do Tabulky 20 je patrné, že se mírně liší výsledky nadaných a ostatních žáků. Rozdíl však není statisticky významný na hladině významnosti 0,05.[4]

Sledovala jsem ještě to, jak byli úspěšní matematicky nadaní žáci. Těch bylo 8 a všichni úlohu řešili správně. Nejčastěji postupovali od konce, v jednom případě se objevilo také algebraické řešení, a to u nadaného žáka 5. ročníku.

Tabulka 3. Různé strategie řešení, úloha 2

	Nadaní		**Ostatní**	
	4. ročník	**5. ročník**	**4. ročník**	**5. ročník**
Správně, experimentem $[(\_\_ + 7): 3] \cdot 5 = 45$	**4**	**1**	**5**	**3**
Správně, od konce $45: 5, 9 \cdot 3, 27 - 7$	**7**	**12**	**6**	**8**
Správně, přes x	**0**	**1**	**0**	**0**
Správně, bez popisu	**6**	**1**	**3**	**3**
Chybně	**4**	**0**	**4**	**5**

Nejčastějším postupem byl postup od konce (Obrázek 1), který lze zde vnímat jako nejsofistikovanější aritmetickou metodu. Nejčastěji ho používali nadaní žáci 5. ročníku.



Obrázek 1. Žák postupuje od konce. Matematicky nadaný žák 4. ročníku, ZŠ

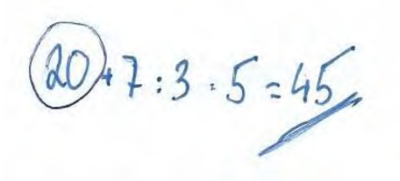
---

[4] Nadaní žáci 4. a 5. ročníku byli při řešení úlohy 2 úspěšní v 88,89 %, ostatní žáci v 75,68 % případů. Pearsonův chí-kvadrát = 2,176, p = 0,140. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 4. ročníku byli při řešení úlohy úspěšní v 80,95 %, ostatní žáci v 77,78 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 1,000. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Nadaní žáci 5. ročníku byli při řešení úlohy 2 úspěšní v 100,00 %, ostatní žáci v 73,68 % případů. Pro testování této hypotézy používáme Fisherův přesný test, protože nejsou splněny podmínky dobré aproximace. p = 0,053. Nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

ISSN 2694-8133

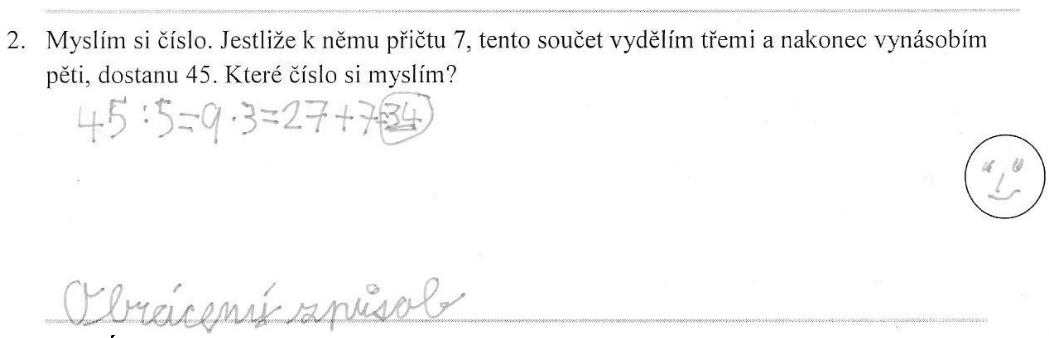
Často se také objevoval výsledek bez zapsání postupu a experimentální řešení, v němž žák hledal číslo, které bude splňovat požadované aritmetické vztahy. V tomto případě však není průkazné, jak žák vlastně postupoval. Mohlo to být metodou pokusu a omylu, kdy za neznámé číslo žák postupně dosazoval, či postupem od konce, který však nebyl zapsán. Jednotlivé možnosti se podstatně liší svojí sofistikovaností.

Na Obrázku 2 vidíme řešení experimentem – žák si nechal volnou pozici, do které doplnil číslo. Lze si všimnout, že zápis neobsahuje závorky, ale žák postupuje tak, jako by tam byly.



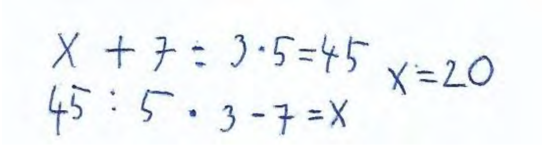
Obrázek 2. Žák postupuje experimentálně. Nediagnostikovaný žák 4. ročníku, ZŠ

Žáci také často používali postup od konce. V mnoha případech přitom využívali tzv. **implikační zápis**, kdy počítali zleva doprava a nerespektovali symbol rovnosti. Na Obrázku 3 je ukázka chyby, které se někteří žáci dopustili. Žák použil „obrácený způsob“, jak uvádí, aplikoval tedy inverzní operace, ale u poslední operace vyměnil odčítání za sčítání.


2. Myslím si číslo. Jestliže k němu přičtu 7, tento součet vydělím třemi a nakonec vynásobím pěti, dostanu 45. Které číslo si myslím?

Obrázek 3. Úloha řešená od konce s chybně volenou operací, implikační zápis. Všeobecně nadaný žák 4. ročníku, ZŠ

Jeden nadaný žák 5. ročníku řešil úlohu algebraicky, pomocí rovnice. Na 0 vidíme, že provedl všechny operace v jednom kroku. Je otázkou, zda neměl pouze štěstí, když se dopracoval ke správnému výsledku. Ze zápisu například není průkazné, zda zvažoval přednost jednotlivých operací, protože zápis opět neobsahuje závorky.



Obrázek 4. Algebraické řešení úlohy s nekorektním zápisem. Všeobecně nadaný žák 5. ročníku, ZŠ, třída pro nadané

Úloha 4: *Mamince a tatínkovi je dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?*

Úspěšnost úlohy 4 je uvedena v Tabulce 4.

Tabulka 4. Úspěšnost, úloha 4

	Počet žáků			**Úspěšnost**		
	Celkem	**4. ročník**	**5. ročník**	**Celkem**	**4. ročník**	**5. ročník**
Nadaní	**37**	**21**	**16**	**33 (89 %)**	**17 (81 %)**	**16 (100 %)**
Ostatní	**42**	**21**	**21**	**18 (43 %)**	**9 (43 %)**	**9 (43 %)**

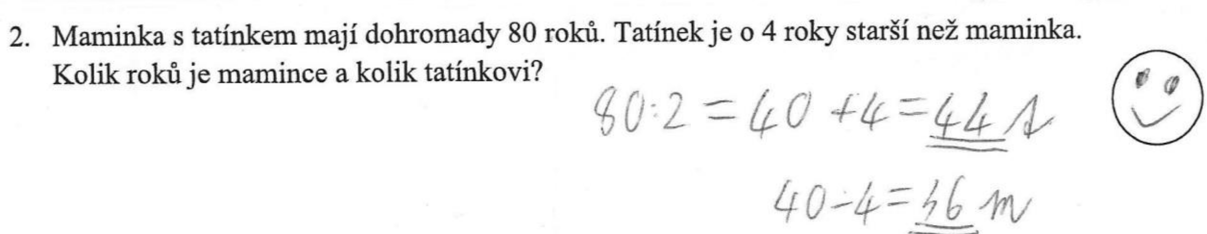
Úloha 4 byla jediná z úloh, u níž se statisticky potvrdil rozdíl mezi výsledky nadaných a ostatních žáků. Na hladině významnosti 0,05 byla zamítnuta nulová hypotéza jak pro všechny žáky dohromady (Pearsonův chí-kvadrát 6,461538, p = 0,00002), tak pro žáky 4. ročníku (Pearsonův chí-kvadrát 18,45495, p = 0,01102) a 5. ročníku (Pearsonův chí-kvadrát 13,53143, p = 0,00023). Nadaní žáci obou ročníků jsou tedy statisticky významně úspěšnější v úloze 4 než ostatní žáci.

Mezi nadanými žáky 4. i 5. ročníku bylo 8 žáků matematicky nadaných. Zkontrolovala jsem i jejich výsledky a všichni úlohu řešili správně. U těchto žáků převažovalo sofistikovanější řešení výpočtem.

V této úloze mnoho žáků neuvedlo postup řešení, a to zejména žáci 4. ročníku. Neuvedený postup může mít v podstatě tři vysvětlení:

a) žák řešil experimentálně metodou pokusu a omylu,
b) žák si výpočet zapisoval stranou a do pracovního listu napsal jen výsledek,
c) žák vyřešil úlohu zpaměti.

Mnoho nediagnostikovaných žáků (platí to zejména pro žáky 5. ročníku) uvedlo nesprávný postup, kdy 80 vydělili dvěma a pak od 40 jednou odečetli 4 a podruhé přičetli 4. Dostali pak výsledek 36 a 44, jak ukazuje Obrázek 5. Pokud žáci neprovedli zkoušku splnění podmínek slovní úlohy, nebo provedli jen zkoušku jedné z podmínek, a to $36 + 44 = 80$, nepoznali, že výsledek není správný.



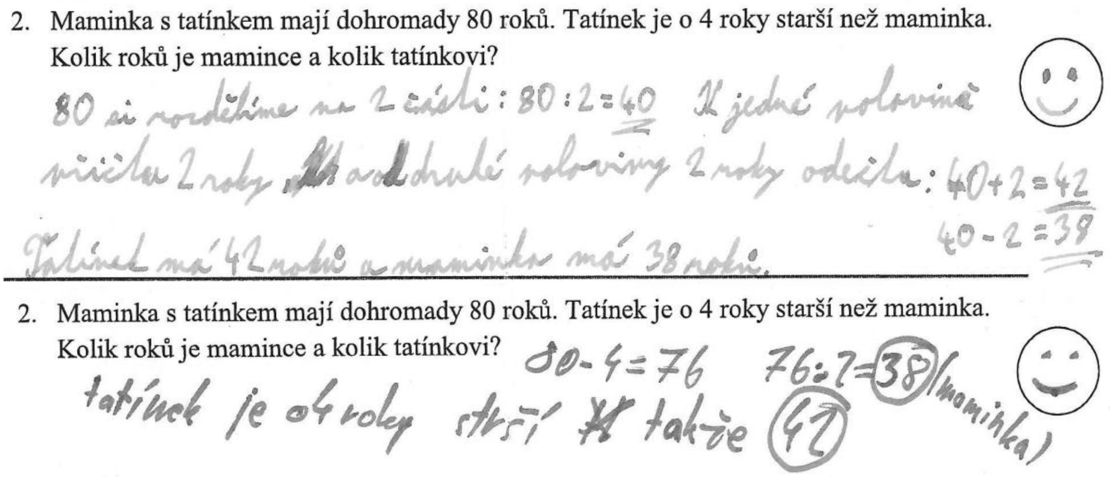
Obrázek 5. Řešení s chybou v úvaze. Nediagnostikovaný žák 5. ročníku, ZŠ, matematická třída

V případě správného řešení se objevily dvě možnosti výpočtu:

1) $80 : 2 = 40, 40 - 2 = 38, 40 + 2 = 42,$
2) $80 - 4 = 76, 76 : 2 = 38, 38 + 4 = 42.$

Řešení jsou ukázána na Obrázku 6.

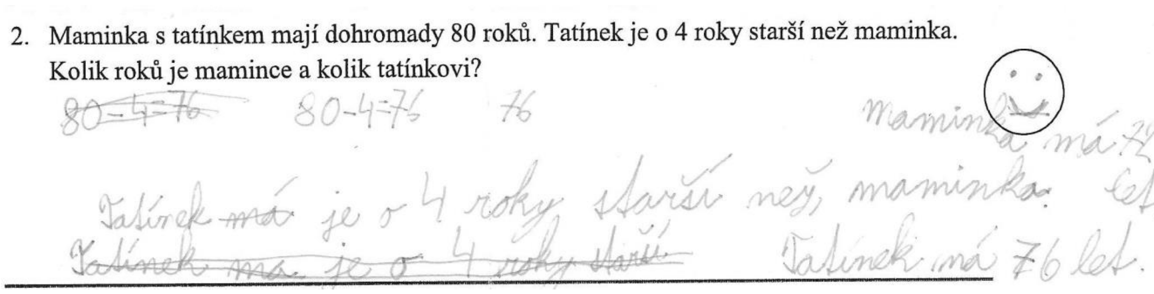
ISSN 2694-8133


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?
80 si rozdělíme na 2 části: 80 : 2 = 40 K jedné polovině přičtu 2 roky a od druhé poloviny 2 roky odečtu: 40 + 2 = 42
40 − 2 = 38
Tatínek má 42 roků a maminka má 38 roků.

2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi? 80 − 4 = 76 76 : 2 = 38 (maminka)
tatínek je o 4 roky starší takže 42

Obrázek 6. Dva způsoby správného řešení úlohy 4. Nahoře matematicky a jazykově nadaná žákyně 4. ročníku, ZŠ. Dole neidentifikovaný žák 5. ročníku, ZŠ, matematická třída

Někdy žáci zvolili zcela nesprávnou úvahu. Jeden z případů je demonstrován na Obrázku 7. Žák neprovedl zkoušku a nezkontroloval, zda je skutečně možné, aby mamince bylo 72 let a tatínkovi 76 let.


2. Maminka s tatínkem mají dohromady 80 roků. Tatínek je o 4 roky starší než maminka.
Kolik roků je mamince a kolik tatínkovi?
~~80-4=76~~ 80-4=76 76 Maminka má 72 let.
Tatínek ~~má~~ je o 4 roky starší než maminka.
~~Tatínek má je o 4 roky starší~~ Tatínek má 76 let.

Obrázek 7. Úloha vyřešená pomocí nesprávné úvahy. Nediagnostikovaná žákyně 4. ročníku, ZŠ, matematická třída

Různé strategie řešení jsou uvedeny v Tabulce 5.

Tabulka 5. Různé strategie řešení, úloha 4

	Nadaní		**Ostatní**	
	4. ročník	**5. ročník**	**4. ročník**	**5. ročník**
Správně, výpočtem $\mathbf{80 : 2 = 40, 40 - 2, 40 + 2}$	**4**	**7**	**2**	**3**
Správně, výpočtem $\mathbf{(80 - 4) : 2 = 38}$	**2**	**4**	**1**	**4**
Správně, bez postupu	**11**	**5**	**6**	**2**
Chybně: 36 a 44	**1**	**0**	**5**	**10**
Chybně	**1**	**0**	**7**	**2**
Neřešeno	**2**	**0**	**0**	**0**

ISSN 2694-8133

Úloha poměrně dobře odlišuje nadané děti od ostatních. Zatímco někteří nadaní v následném rozhovoru s učitelem uvedli, že úloha pro ně byla velmi jednoduchá, mnoho nediagnostikovaných dětí se v zadání ztrácelo. V tabulce můžeme zejména vidět, že mnoho těchto dětí si neuvědomilo, že když dělí dvěma součet let $(80 : 2)$, musí také vydělit dvěma rozdíl let $(4 : 2)$.

9. Diskuse a závěry

Nyní je možné odpovědět na výzkumné otázky, které jsem si položila. První výzkumná otázka zjišťovala, zda budou nadaní žáci při řešení vybraných úloh úspěšnější než ostatní žáci. Obecně nelze tvrdit, že u vybraných úloh by nadaní žáci byli při řešení úspěšnější než ostatní žáci. To může být samozřejmě dáno malým vzorkem zkoumaných žáků, ale spíše se domnívám, že tento závěr skutečně odráží realitu. Nadaní a bystří žáci se od sebe svými výkony v matematice nemusí příliš lišit. Nadaní žáci, zejména pak matematicky nadaní, častěji používají sofistikovanější metody řešení, avšak nejsou neomylní, dopouští se chyb logických i početních.

Druhá otázka se zaměřovala na jednotlivé úlohy a zjišťovala, zda mezi nimi bude taková, v níž budou nadaní žáci výrazně úspěšnější než nediagnostikovaní žáci. U některých úloh byly výsledky nadaných a ostatních žáků srovnatelné, v některých dokonce ostatní žáci dopadli lépe. Nejvíce odlišovaly nadané a ostatní žáky úlohy 2 a 4. Statisticky významný byl rozdíl pouze u úlohy 4. Úloha 2 je aritmetická úloha, vedoucí k tříkrokové rovnici. Domnívám se, že právě tři kroky vedou k tomu, že pro žáky je náročnější řešit úlohu zcela pamětně. Nejčastěji žáci využívali sofistikovanou metodu řešení od konce. Úloha 4 je slovní úloha a k úspěšnému řešení je potřebná správná aritmetická představa. Pokud tuto představu žák nemá, nepřijde na to, jaké aritmetické operace má použít. Takové chyby v úvaze se častěji dopustili nediagnostikovaní žáci. Nadaní žáci nejčastěji použili buď jednu z uvedených výpočtových metod, nebo zapsali výsledek bez postupu, což může korespondovat s pamětným řešením.

Poslední otázka se ptala, které řešitelské strategie budou nadaní žáci preferovat. Vybraná strategie závisela na typu úlohy. U jednoduchých úloh převažovalo experimentální pamětní řešení, kdy žák zkoušel dosazovat různá čísla a kontroloval uvedené vztahy. V případě úlohy 2 byl často využívaným řešením postup od konce, v případě úlohy 4 aritmetické výpočty.

V různých případech jsem se setkávala s nezvládnutou gramatikou zápisu. Jednalo se nejčastěji o používání zkrácených implikačních zápisů a nepoužívání závorek, jestliže mělo mít sčítání přednost před násobením. Zkrácený implikační zápis většinou nebývá vnímán jako závažná chyba, spíše jako pomocný zápis, ve kterém se žák vyzná. Kuřina (1989) tuto chybu označuje jako syntaktickou chybu a uvádí, že je pro žáky přirozená. „Žák úlohu postupně řeší, zapisuje dílčí výsledky a na ně navazuje dalším postupem“ (Kuřina, 1989: s. 32). Tento zápis je však matematicky nesprávný, protože je porušena tranzitivita relace rovnosti. Řešiteli může zápis dávat smysl, neboť řešitel rovnítko chápe jako implikaci. Je nutné si ale uvědomit, že pokud se žák naučí vnímat symbol „=“ jako jednosměrnou šipku $\Rightarrow$, může mít problémy v rovnicových zápisech, kde je neznámá na obou stranách rovnice, a nelze tedy postupovat zleva doprava.

V testování se projevilo, že žáci neumí používat závorky. Stejnou zkušenost získala Žalská (2015) ve svém výzkumu, kde se projevily problémy žáků s aktivním používáním závorek (tedy použitím závorky jako symbolu pro celistvý algebraický nebo aritmetický objekt), v menší míře i s pasivním používáním závorek (tj. interpretací závorek a jejich významu v aritmetické a algebraické syntaxi při aplikaci distributivního zákona a pořadí operací). Potíž měli žáci s pořadím operací, kdy nezřídka postupovali zleva doprava a sčítali před násobením (např. $6 + 3(2 + 1) = 9(2 + 1)$). Nevyužívání závorek žákům na 2. stupni způsobuje problémy také

ISSN 2694-8133

v algebře, když už není možné provést naznačené operace a je například nutné roznásobit závorku.

Několik nadaných žáků využívalo algebraické zápisy. Často bylo patrné, že tito žáci si umí správně označit neznámou a sestavit rovnici, problémy měli obvykle jen s gramatikou zápisu (jak bylo již uvedeno, např. nepoužívali závorky). Rogers a Novotná (2003) uvádí čtyři stupně přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen v písemném záznamu zadaných informací:

1) Řešitel používá jedno písmeno k označení více neznámých, písmeno je pro něj označení jakékoli obecné neznámé.
2) Řešitel používá jedno nebo více písmen ve fázi kódování textu, ale nepracuje s nimi ve fázi transformace, neznámá je použita pouze jako označení něčeho, co se má hledat. Řešení je aritmetické.
3) Řešitel vědomě používá písmena pro označování hledaných hodnot a pro popis zadaných vztahů, avšak stále jsou pro něj důležité aritmetické modely, proto je použito aritmetické řešení.
4) Řešitel používá písmena k označení hodnot, uplatňuje algebraické operace. V tomto případě jsou splněny podmínky pro správné používání algebraických metod.

Jestliže žák 1. stupně používá písmena k řešení problému, není zcela jisté, na kterém stupni přechodu od aritmetického k algebraickému způsobu využívání písmen se nachází. Pokud se jedná o umělé urychlení poznávacího procesu (např. žák zápisu nerozumí, ale líbí se mu, že ho používá mezi vrstevníky pouze on), vzniká riziko upevnění nesprávných představ o algebraických metodách. Zejména se jedná o přednost operací a používání závorek.

Závěrem zmíním, že žáci neprováděli zkoušku správnosti svých výpočtů. Z toho důvodu mnohdy neodhalili chybu, které se dopustili. Leckdy si žáci nevšimli ani výsledku, který byl v kontextu zadání nesmyslný.

Literatura

Blažková, R. & Budínová, I. (2014). *Pracovní listy 1 - 8 pro matematicky nadané žáky 4. a 5. ročníku.* Brno: Centrum MU pro rozvoj nadaných dětí v JM kraji.

Hejný, M. a kol. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava: Státní pedagogické nakladatelství.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: PdF UK.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: PedF UK.

Rogers, L. & Novotná, J. (2003). Word Problems: A Framework for Understanding, Analysis and Teaching. In: *Classroom Contexts. Effective Learning and Teaching of Mathematics from Primary to Secondary School* (s. 79-96). Bologna: Pitagora Editrice.

Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In Vondrová, N. & Rendl, M.: *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (s. 319–400). Praha: Karolinum.

ŚRODKI IT W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Monika CZAJKOWSKA
The Maria Grzegorzewska University in Warsaw, Institute of Assisted Human Development and Education (Poland)
mczajkowska@aps.edu.pl

Abstrakt

W artykule przedstawiam częściowe wyniki badań własnych, prowadzonych w ramach projektu pt. *Wdrażanie uczniów w wieku 12–17 lat do rozwiązywania zadań w wersji komputerowej*. Badania pokazały, że zdecydowana większość nauczycieli deklaratywnie wykorzystuje środki IT w procesie nauczania-uczenia się matematyki. Nauczyciele używają ich głównie do uatrakcyjnienia zajęć i prezentacji treści matematycznych. Nie stosują jednak tych środków (lub robią to rzadko) do indywidualizacji nauczania i samodzielnej pracy uczniów na lekcji. Bardzo rzadko wykorzystują zadania, wymagające od ucznia eksperymentowania na ekranie komputera, stawiania hipotez i ich weryfikowania. Taka sytuacja jest, z jednej strony, wynikiem poglądów nauczycieli na temat miejsca i roli środków IT w edukacji matematycznej, a z drugiej - niedostatecznego wyposażenia szkół w komputery, tablety i smartfony.

Słowa kluczowe: matematyka, nauczyciele, środki IT

IT RESOURCES IN MATHEMATICAL EDUCATION

Abstract

In this article, I present the partial results of my own research, conducted as part of the project entitled Introducing students aged 12–17 to solving computer-based tasks. The research shows that the vast majority of teachers make declarative use of IT solutions in the math teaching/learning process. Teachers use them mainly for making their classes more interesting and as a means of presenting mathematical content. However, they do not make use of these solutions (or do it rarely) for the purposes of individualizing teaching and having students working independently during the lesson. They very rarely make use of tasks which require the student to experiment on the computer screen, make hypotheses and verify them. This situation stems both from the teachers' views on the place and role of IT solutions in mathematics education as well as from an insufficient supply of computers, tablets, and smartphones at schools.

Keywords: math, teachers, IT tools

1. Wstęp

Niezwykle dynamiczny rozwój technologii informacyjno-komunikacyjnych i coraz większa powszechność komputerów i urządzeń mobilnych (np. tabletów, smartfonów, iPodów, iPhonów) spowodowały, że środki IT stały się integralną częścią codziennego życia (Bednarek 2006: 8). Współcześni młodzi ludzie, „urodzeni się z myszką w ręku" są bardzo silnie zanurzeni w cyfrowym świecie, który jest dla nich naturalnym środowiskiem funkcjonowania. Internet dostarcza im rozrywki i wiedzy, umożliwia kontakty międzyludzkie, pozwala na łatwe i szybkie pozyskiwanie informacji bez ograniczeń związanych z miejscem i czasem.

ISSN 2694-8133

Począwszy od okresu przedszkolnego dzieci stykają się z urządzeniami mobilnymi i wirtualną rzeczywistością. Z badań pt.: *Cyberniania i dzieci przyszłości*, przeprowadzonych w Polsce w 2013 r. przez Research. NK na grupie 402 rodziców dzieci w wieku od 1 roku do 10 lat wynika, że ok. 70 % rodziców udostępnia swoim dzieciom urządzenia mobilne w celu zabawy, a co drugi rodzic w celach edukacyjnych. W efekcie ok. 75 % dzieci w wieku od 1 roku do 10 lat co najmniej kilka razy w tygodniu korzysta z laptopa lub smartfona. Co więcej, ok. 21 % dzieci powyżej czwartego roku życia korzysta z tego typu urządzeń oraz używa aplikacji zainstalowanych przez rodziców bądź samodzielnie instaluje takie programy. Z tych samych badań wynika, że ok. 80 % dzieci w wieku 8 lat ma dostęp do internetu (Juszczak, 2013; Kram i Mielcarek, 2014: 54). Podobne wyniki uzyskano w badaniach przeprowadzonych w 2015 r. przez fundację *Dzieci Niczyje* w ramach projektu „Polish Safer Internet Centre". Wzięło w nich udział 1011 rodziców dzieci w wieku od 6 miesięcy do 6,5 lat. Aż 69 % badanych zadeklarowało, że udostępnia swoim dzieciom urządzenia mobilne, kiedy muszą zająć się własnymi sprawami. Z badań tych wynika też, że 64 % dzieci poniżej 7 roku życia korzysta z urządzeń mobilnych, przy czym co czwarte robi to codziennie. Zazwyczaj dzieci na smartfonie lub na tablecie oglądają filmy (79 %) lub grają w gry komputerowe (62 %). Większości dzieci (63 %) zdarzyło się też bawić smartfonem lub tabletem bez konkretnego celu. Ok. 26 % dzieci posiada własne urządzenie mobilne (25 % dzieci w wieku 3–4 lata i prawie 40 % dzieci w wieku 5–6 lat) (Bąk, 2015: 7).

Ponieważ edukacja, w tym również edukacja matematyczna, powinna uwzględniać wszystkie aspekty czasów, w jakich żyją uczniowie, więc koniecznością stało się włączenie środków IT do procesu nauczania i uczenia się matematyki. Jedną z głównych przyczyn, dla której organizacja tego procesu nie może być taka sama jak dwadzieścia, czy nawet dziesięć lat temu jest to, że dzięki nowym technologiom uczniowie mają szybki i łatwy dostęp do tych samych informacji, co ich nauczyciele. Jednak sam dostęp do informacji nie gwarantuje tego, że uczniowie będą potrafili z nich odpowiednio korzystać. Dlatego coraz większy nacisk kładzie się na samokształcenie i wyposażenie uczniów w umiejętności uczenia się. Jak pisze Janusz Morbitzer (2011: 52) „współczesna edukacja przenosi akcenty z nauczania na metanauczanie, czyli nauczanie o nauczaniu". Takie podejście do nauczania pociąga za sobą przedefiniowanie roli nauczyciela. Obecnie uważa się, że jego głównym zadaniem nie jest przekazywanie uczniom wiedzy przedmiotowej i egzekwowanie jej opanowania, lecz rozwijanie ciekawości i kształtowanie właściwych postaw. Współczesny nauczyciel powinien być raczej przewodnikiem i mentorem, stymulującym działania każdego ucznia w kierunku samodzielności, pomysłowości i zaradności poznawczej (Wasielewski, 2015: 24). Istotne jest, aby rozwijał u swoich uczniów umiejętności odróżniania informacji prawdziwych, naukowo pewnych i sprawdzonych, od fałszywych i dydaktycznie szkodliwych. Jak wynika z badań młodzi ludzie mają bowiem skłonność do bezkrytycznego zaufania informacjom uzyskanym z internetu oraz priorytetowego traktowania takiego sposobu pozyskiwania wiadomości (Makiewicz, 2010: 118).

Należy zauważyć, że edukacja matematyczna odbywa się przede wszystkim poprzez rozwiązywanie specjalnie dobranych zadań. To one są głównym źródłem doświadczeń matematycznych i logicznych, z których uczniowski umysł buduje swoje kompetencje matematyczne (Gruszczyk – Kolczyńska, 1992). Co więcej, „uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka mu się ukazuje przez pryzmat rozwiązywanych przez niego zadań. Stosunek ucznia do matematyki i motywacje uczenia się tego przedmiotu w dużej mierze od tego zależą." (Krygowska, 1977: 3). Nie jest zatem obojętne, ani z punktu widzenia kształcenia matematycznego, ani motywacji uczenia się tego przedmiotu, jakie zadania uczeń będzie rozwiązywał.

ISSN 2694-8133

Coraz częściej w literaturze akcentowany jest pozytywny wpływ środków IT na umiejętność rozwiązywania zadań przez uczniów. Należy jednak rozróżnić sytuacje, gdy uczeń: 1) otrzymał zadanie matematyczne w wersji papierowej i środki IT mają go wspomagać w rozwiązaniu tego zadania, 2) dostał zadanie w wersji elektronicznej – wyświetlone na ekranie – ale proces rozwiązywania odbywa się metodą tradycyjną (uczeń rozwiązuje zadanie w zeszycie), 3) dostał zadanie w wersji elektronicznej i aby je rozwiązać musi posłużyć się komputerem.

W pierwszym przypadku rozwiązanie zadania bez użycia środków IT jest możliwe. Pełnią one jedynie rolę pomocniczą. Wykorzystywane są do prezentacji, ilustracji lub wyjaśnienia treści matematycznych (Bugajska – Jaszczołt i Czajkowska, 2008). Mogą pomóc uczniowi w zrozumieniu sytuacji i odkryciu drogi rozwiązania problemu (Kąkol i Ratusiński, 2004, Kąkol, 2006, Kąkol i Pająk, 2009, Parcia, 2004). Mogą wykonać za ucznia część pracy po to, aby mógł się on skupić na tym, czego komputer nie może wykonać i co jest domeną ludzkiej działalności (Kutzler, 2000). Mogą być pomocne w pracy dydaktycznej ukierunkowanej na aktywizowanie uczniowskich matematycznych postaw twórczych (Makiewicz, 2004) oraz w prowokowaniu niektórych matematycznych aktywności, takich jak stawianie i weryfikowanie hipotez, formułowanie nowych problemów, wnioskowanie i dedukowanie (Kąkol i Ratusiński, 2004, Kąkol, 2006). Mogą też, dzięki odpowiedniemu oprogramowaniu, pomóc uczniowi w uzupełnieniu ewentualnych luk w wiedzy (Kąkol i Pająk, 2009) lub redukowaniu bezradności matematycznej (Czajkowska, 2009).

Inna jest sytuacja, gdy uczeń otrzymuje zadanie w wersji elektronicznej, które jest wyświetlone, np. na ekranie podłączonym do rzutnika multimedialnego, na tablicy interaktywnej lub na ekranie komputera, ale ma je rozwiązać w zeszycie. Wtedy wielokrotnie musi przenosić wzrok z ekranu na papier i inaczej organizować swoje pole spostrzeżeniowe. Warto zauważyć, że tego typu sytuacje występują stosunkowo często w polskiej szkole.

Jeszcze inna jest sytuacja, w której zadanie udostępnione jest uczniowi za pomocą komputera i którego rozwiązanie należy przedstawić na ekranie monitora. Z takimi zadaniami uczniowie spotykają się coraz częściej w związku z rosnącą tendencją organizowania sprawdzianów i konkursów w wersji elektronicznej. Przykładem mogą być tu: badania PISA, niektóre konkursy przedmiotowe, czy też testy on-line dostępne na stronach internetowych.

Przeprowadzona przeze mnie analiza zadań matematycznych w wersji elektronicznej pokazała, że takie zadania różnią się znacznie między sobą np. zakresem umiejętności matematycznych i informatycznych, koniecznych do ich rozwiązania, stopniem interaktywności, dostępnością operacji, które można lub trzeba wykonać, miejscem zapisywania lub podawania odpowiedzi. Dlatego podjęłam próbę scharakteryzowania pewnych typów zadań matematycznych w wersji elektronicznej.

Zadania w wersji elektronicznej, dzielę na parainteraktywne i interaktywne, uwzględniając specyfikę opisanych powyżej dwóch sytuacji, w których takie zadania występują. Parainteraktywnym zadaniem statycznym nazywam takie zadanie, którego treść zamiast na kartce papieru podawana jest na ekranie komputera, tabletu lub telefonu, na ekranie rzutnika multimedialnego lub na tablicy interaktywnej. Nie zawiera ono ruchomych elementów. Niekiedy uczeń (lub nauczyciel) może jedynie przesunąć, powiększyć lub zmniejszyć tekst zadania, podkreślić lub podświetlić wyróżniony fragment, dodawać komentarze. Nie może natomiast zmieniać ani samego tekstu, ani danych. Zadanie tego typu nie prowokuje do przeprowadzania eksperymentów, stawiania hipotez i ich weryfikowania. Jego rozwiązanie uczeń przedstawia w zeszycie lub na tablicy. Często zadania parainteraktywne statyczne są zapisane w plikach pdf. lub pochodzą z elektronicznych wersji podręczników szkolnych. Zadanie parainteraktywne statyczne można wydrukować bez szkody dla samego zadania i tym

ISSN 2694-8133

samym zmienić jego formę z elektronicznej na papierową. Parainteraktywne zadania dynamiczne różnią się tym od poprzednich, że zawierają dynamiczne elementy. Uczeń może je jedynie obserwować (nawet wielokrotnie), ale nie ma możliwości dokonywania zmian ani w tekście zadania ani w jego ruchomych elementach.

Oczywiście zadania parainteratywne (statyczne i dynamiczne) są w pewnym sensie interaktywne. Jednak taka interaktywność jest zbyt prymitywna, aby mieć znaczący wpływ na rozwój kompetencji matematycznych ucznia. Może natomiast mieć znaczenie na subiektywne odczucie stopnia trudności zadania i poziom jego wykonania.

Zadaniem interaktywnym nazywam takie zadanie w wersji elektronicznej, które dopuszcza, a czasami nawet wymaga od ucznia podjęcia na ekranie komputera działań przemyślanych, planowych, ukierunkowanych na badanie przedstawionej sytuacji, na poszukiwanie drogi rozwiązania problemu lub na zapisanie odpowiedzi na ekranie komputera. Wśród zadań interaktywnych wyróżniam kilka ich typów.

Zadanie interaktywne w formie zamkniętej to zadanie bardzo zbliżone do papierowej wersji zadania zamkniętego. Może ono być typu prawda–fałsz, wielokrotnego wyboru lub „na dobieranie". Tego typu zadania występują często na konkursach matematycznych on-line oraz na różnych stronach internetowych zawierających testy do kontroli lub samokontroli wiedzy i umiejętności ucznia. Jedną z głównych różnic między papierową a elektroniczną wersją jest sposób zaznaczania odpowiedzi. W zadaniach w wersji elektronicznej wybraną odpowiedź (lub odpowiedzi) uczeń zaznacza na ekranie monitora komputera za pomocą myszki lub klawiatury albo na wyświetlaczu telefonu, wciskając odpowiednie klawisze. W zadaniach w wersji papierowej – uczeń wskazuje wybraną odpowiedź (lub odpowiedzi) np. pisząc obok niej odpowiedni znak (np. krzyżyk), zamalowując znajdujący się obok niej kwadracik, otaczając ją kółkiem, podkreślając ją, rysując odpowiednie linie. Inną różnicą jest to, że w wersji elektronicznej zadań wielokrotnego wyboru, w których tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa, uczeń zazwyczaj nie ma możliwości zaznaczenia więcej niż jednej odpowiedzi i zawsze jest ona wskazana jednoznacznie. Rozwiązując analogiczne zadanie w wersji papierowej uczeń może wskazać kilka odpowiedzi. Może też dokonywać wielokrotnych poprawek i skreśleń, zamazując wcześniejsze wybory. To zaś może powodować, że praca staje się nieczytelna i nie zawsze jest jasne, która z zaznaczonych przez ucznia odpowiedzi jest ostateczną. Zarówno w papierowej jak i w elektronicznej wersji takich zadań, uczeń może w myśli wykonywać obliczenia i prowadzić pewne rozumowania. W przypadku zadań w wersji papierowej może też robić notatki i zapisywać obliczenia pomocnicze bezpośrednio w arkuszu. Nie ma natomiast takiej możliwości, gdy rozwiązuje zadanie w wersji elektronicznej i nie dysponuje dodatkowo kartką papieru i przyborami do pisania (np. długopisem, piórem, ołówkiem). Co więcej, jak pokazują prowadzone przeze mnie badania, nawet wtedy, gdy te materiały są dostępne, to częste przenoszenie wzroku z ekranu na kartkę jest męczące i powoduje, że wielu uczniów rezygnuje z takiej możliwości. Różnica miedzy papierową a elektroniczną wersją zadań zamkniętych polega też na tym, że w zadaniach zamkniętych uczeń otrzymuje natychmiastową odpowiedź o poprawności rozwiązania zadania. Gdy błędnie rozwiąże zadanie, albo dostaje informację, która z odpowiedzi była poprawna, albo ma możliwość ponownego rozwiązywania zadania. Warto też zwrócić uwagę na to, że rozwiązując test w wersji papierowej, zawierający zadania zamknięte, uczeń zawsze może powrócić do zadań wcześniej rozwiązywanych. Gdy taki test jest w wersji elektronicznej, w zależności od programu, uczeń może mieć (ale nie zawsze ma) możliwość powrotu do zadań, nad którymi wcześniej pracował.

Zadaniem właściwie interaktywnym nazywam takie zadanie, które wymaga aktywnego działania na ekranie monitora za pomocą myszki lub klawiatury. Aby odpowiedzieć na postawione pytania, uczeń musi przeprowadzać eksperymenty, prowadzić obserwacje, formułować wnioski, stawiać hipotezy i je weryfikować. Często również rozwiązanie takiego zadania uczeń ma podać w wersji elektronicznej, wpisując je w wyskakujące okienko lub przedstawiając np. na sporządzonym komputerowo wykresie, na rysunku lub w tabeli. Takie zadania pojawiają się w niektórych badaniach edukacyjnych (np. występowały w tzw. opcji komputerowej w badaniu PISA 2012) oraz na stronach internetowych.

Wśród zadań interaktywnych wyróżniam też interaktywne gry matematyczne. Tak jak wszystkie gry, zawierają one element rywalizacji, przy czym przeciwnikiem ucznia może być inny uczeń lub komputer. Czasami uczeń może też rywalizować sam ze sobą, dążąc do uzyskania możliwie najwyższego wyniku (i pokonując swoje kolejne rekordy) lub do przejścia wszystkich poziomów gry.

Badania prowadzone przeze mnie w latach 2015-2018 i kontynuowane obecnie pokazały, że uczniowie inaczej funkcjonują w trakcie rozwiązywania zadań w wersji papierowej, a inaczej, gdy mają rozwiązać zadania w wersji elektronicznej (Czajkowska, 2016a, 2016b, 2016c). Niektóre z typów zadań matematycznych w wersji elektronicznej są dla wielu uczniów trudniejsze niż zadania w wersji papierowej. Dzieje się tak dlatego, że na trudność zadania matematycznego nakłada się trudność pracy z komputerem, tabletem czy smartfonem. A zatem dość powszechne opinie, że zadania matematyczne w formie elektronicznej rozwiązuje się w taki sam sposób jak zadania w wersji papierowej oraz że jeśli uczeń dobrze radzi sobie z rozwiązywaniem zadań w wersji papierowej, to w naturalny sposób będzie potrafił rozwiązywać zadania w formie elektronicznej, są, w świetle prowadzonych przeze mnie badań, fałszywe. Badania te pokazały również, że niektórzy uczniowie szukają w zadaniach w wersji elektronicznej jedynie rozrywki i przyjemności (Czajkowska, 2016c). Podobne rezultaty uzyskał Jelinek (2013) badając zachowania uczniów klas pierwszych szkoły podstawowej w trakcie pracy z programem *Klik uczy liczyć*. A zatem można wnosić, że umiejętności rozwiązywania zadań w wersji elektronicznej nie rozwijają się samorzutnie i muszą być kształcone w sposób zamierzony.

Dlatego postanowiłam sprawdzić, czy, i w jaki sposób, nauczyciele matematyki wykorzystują zasoby internetowe do wspierania procesu uczenia się matematyki oraz czy, i w jaki sposób, stwarzają uczniom sytuacje do nabywania, rozwijania i doskonalenia umiejętności rozwiązywania zadań matematycznych w wersji elektronicznej. W celu wyjaśnienia zasygnalizowanych problemów przeprowadziłam w 2018 r. badania podstawowe pt. *Wdrażanie uczniów w wieku 12-17 lat do rozwiązywania zadań w wersji komputerowej*, które były realizowane w Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie. W niniejszej pracy przedstawiam tylko fragment tych badań oraz niektóre z uzyskanych wyników.

2. Cele i metody badań. Charakterystyka badanej grupy osób

Głównym celem badań był opis postaw nauczycieli matematyki wobec wykorzystania środków IT na lekcjach matematyki oraz charakterystyka sposobów wdrażania uczniów do rozwiązywania zadań matematycznych w wersji elektronicznej. Chciałam ustalić, z jakich zasobów internetu korzystają nauczyciele, jakie znają strony internetowe i w jakim celu je wykorzystują na lekcjach matematyki. W ramach tego celu wyodrębniłam m.in. następujące zadania badawcze: 1) rozpoznanie przekonań i opinii nauczycieli na temat wykorzystania komputera i urządzeń mobilnych na lekcjach matematyki, 2) ustalenie jak często, w jaki sposób i do czego wykorzystywany jest komputer i urządzenia mobilne na lekcjach matematyki, 3) ustalenie, w jaki sposób uczniowie wdrażani są do pracy z zadaniami w wersji elektronicznej, jak często i jakiego typu zadania w wersji elektronicznej są wykorzystywane na lekcjach.

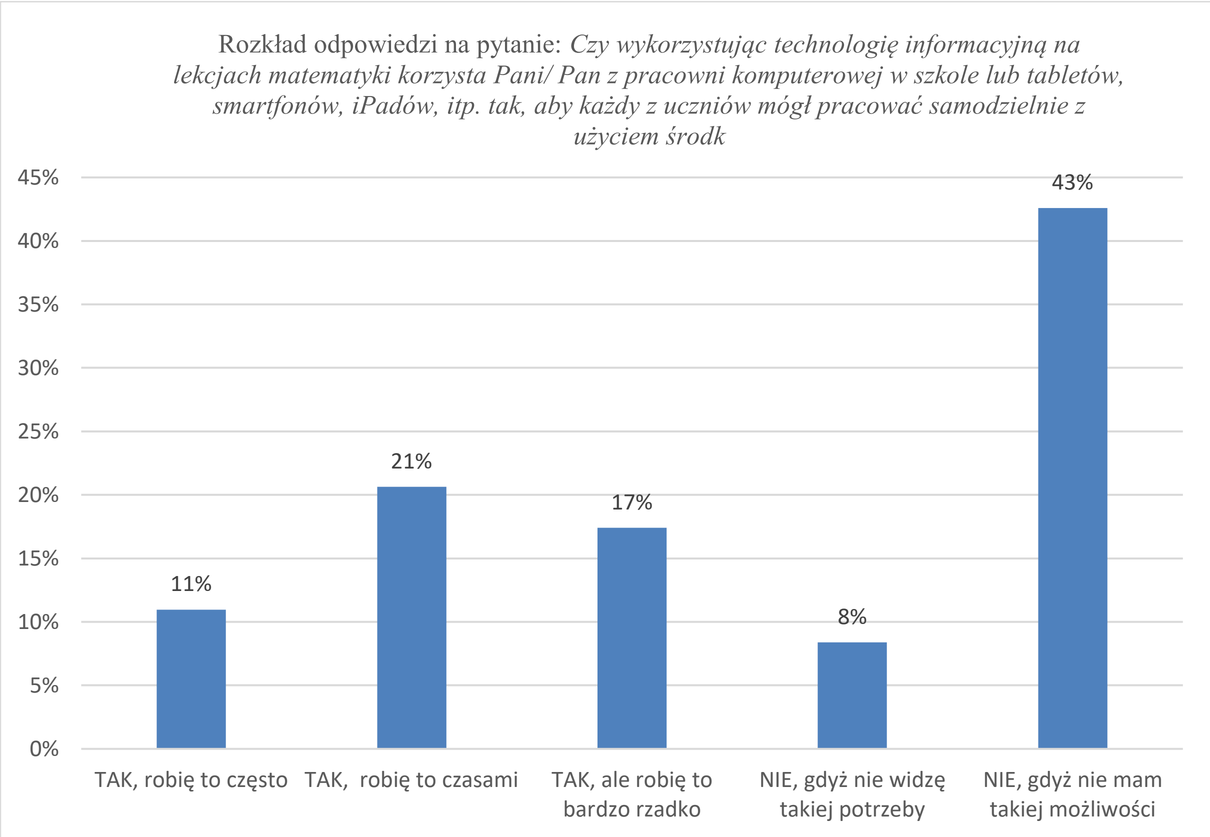
W badaniach zastosowałam metodę sondażu z wykorzystaniem ankiety w formie elektronicznej. Ankieta, kierowana do nauczycieli matematyki, była anonimowa. Składała się z 25 głównych pytań, przy czym część z nich zawierała pytania szczegółowe; łącznie w ankiecie było 41 pytań. Dotyczyły one: 1) celowości wykorzystania komputera i urządzeń mobilnych na lekcjach matematyki, 2) częstotliwości użycia tych środków, 3) sposobów organizacji lekcji matematyki z wykorzystaniem zasobów internetu, 4) znajomości stron www, zawierających zadania w wersji elektronicznej 5) wykorzystywania zasobów internetu do pracy z uczniami o szczególnych potrzebach edukacyjnych (uczniów uzdolnionych matematycznie lub mających trudności z nauką matematyki), 6) częstotliwości oferowania uczniom zadań w wersji elektronicznej, 7) sposobów wdrażania uczniów do pracy z zadaniami w wersji elektronicznej. W ankiecie część pytań było otwartych, dających respondentom swobodę wypowiedzi i przedstawienie własnego punktu widzenia. W pytaniach zamkniętych, których celem było rozpoznanie częstotliwości występowania danego zjawiska, zazwyczaj stosowałam skalę czterostopniową. Analizując wypowiedzi nauczycieli, wyborom „bardzo często", „często", „rzadko", „nigdy lub prawie nigdy" lub „na każdej lub prawie każdej lekcji", „często na wielu lekcjach", „rzadko, na niektórych lekcjach", „nigdy lub prawie nigdy" przyporządkowałam odpowiednio liczby: 1,5, 0,5, -0,5, -1,5. Dzięki temu mogłam wyliczać średnie i dokonywać pewnych porównań. Drugą z zastosowanych metod był wywiad pogłębiony. Pytania zawarte w scenariuszu wywiadu dotyczyły tych samych kwestii, co pytania w ankiecie. W wywiadach wzięło udział 20 nauczycieli matematyki. Głównym kryterium doboru nauczycieli do wywiadu była ich zgoda na udział w badaniu. W niniejszym artykule omawiam tylko częściowe wyniki z badań ankietowych, choć przy ich interpretacji wykorzystuję również informacje pozyskane w trakcie wywiadów.

Badania ankietowe przeprowadziłam w okresie lipiec-grudzień 2018 r. Wzięło w nich udział 155 nauczycieli matematyki, uczących w różnych typach szkół. W badanej grupie były 133 kobiety (85,8 %) i 22 mężczyzn (14,2 %). Badani pochodzili z różnych województw. W szkołach wiejskich pracowało 24 (15,5 %) respondentów, a w szkołach znajdujących się w miastach – 131 (84,5 %). Stopniem nauczyciela dyplomowanego legitymowało się 105 (67,7 %) badanych, mianowanego – 17 (11,0 %), kontraktowego – 24 (15,5 %), stażysty – 4 (2,6 %), a pozostali nie posiadali stopnia awansu zawodowego.

3. Wyniki badań

Zdecydowana większość nauczycieli (147 osób; 95 %) zadeklarowała, że wykorzystuje środki IT w procesie nauczania–uczenia się matematyki. Jednak już tylko co trzeci podał, że jego uczniowie, przynajmniej czasami mają możliwość używania komputerów, tabletów, telefonów komórkowych, iPadów, smartfonów itp. w trakcie samodzielnej pracy na lekcji. Aż 66 badanych (43 %) poinformowało, że nie mają możliwości takiej organizacji pracy uczniów (wykres 1.). Wskazywali oni na brak odpowiedniego sprzętu, oprogramowania, dostępu do sal komputerowych oraz regulaminy zakazujące korzystania w szkołach z telefonów komórkowych lub tabletów, czasami nawet w celach dydaktycznych. Nauczyciele szkół podstawowych sygnalizowali, że nie mają też możliwości korzystania z prywatnego sprzętu dzieci. Niektóre z nich w ogóle nie posiadają lub nie przynoszą do szkoły smartfonów, innym rodzice zablokowali dostęp do internetu. Pewnym problemem jest również to, że dzieci mają różne modele telefonów. Są one spersonalizowane - uczniowie mają na nich zainstalowane tylko te aplikacje i aktywne tylko takie funkcje, które zdaniem rodziców, są dzieciom potrzebne lub na które wyrazili oni zgodę.

Różny sprzęt, oprogramowanie i blokady rodzicielskie powodują, że nauczyciel nie ma możliwości udzielenia uczniom pomocy w zakresie obsługi telefonu, np. w sytuacji, gdy dzieci nie potrafią lub nie mogą zainstalować aplikacji wskazanej przez nauczyciela. Jeszcze innym problemem jest to, że gdy uczniowie pracują na swoim sprzęcie, nauczyciel nie jest w stanie przejąć pełnej kontroli nad tym, co jego podopieczni robią – czy wykonują polecenia, czy też np. grają w gry, przeglądają zasoby internetu, korzystają z poczty elektronicznej. Na tę ostatnią kwestię zwracali uwagę nauczyciele uczący na wszystkich poziomach edukacji.



Wykres 1. Wykorzystanie środków IT w samodzielnej pracy ucznia na lekcjach matematyki

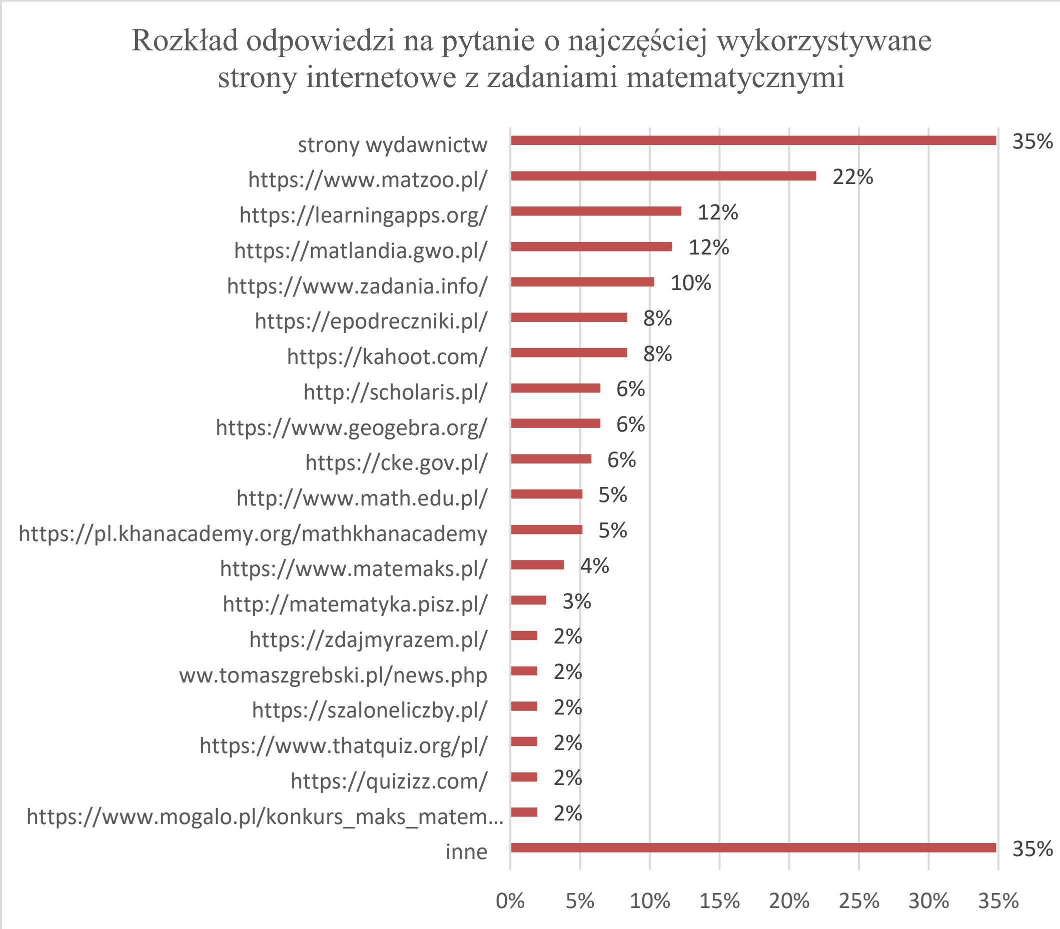
Na pytanie o to, w jakim celu badani wykorzystują środki IT na lekcjach matematyki, najwięcej osób zadeklarowało, że stosuje je w celu uatrakcyjnienia lekcji. Ok. 72 % robi to często lub bardzo często. Najrzadziej nauczyciele wykorzystywali te środki do ułatwienia znalezienia rozwiązania zadania, do poszukiwania nowych (innych) sposobów jego rozwiązania lub do badania problemów, których rozwiązanie byłoby niedostępnie przy użyciu tradycyjnych środków (tabela 1.).

Tabela 1. Rozkład odpowiedzi na pytanie o cel wykorzystywania środków IT na lekcjach matematyki

cel wykorzystywania środków IT na lekcjach matematyki	na każdej lub prawie każdej lekcji	często, na wielu lekcjach	rzadko, tylko na niektórych lekcjach	nigdy lub prawie nigdy	średnia
Urozmaicenie i uatrakcyjnienie lekcji	17,4%	54,8%	22,6%	5,2%	0,35
Ułatwianie rozumienia pojęć matematycznych	14,8%	53,5%	25,2%	6,5%	0,27
Rozwijanie umiejętności rozumowania	11,6%	49,7%	30,3%	8,4%	0,15
Wizualizacja treści matematycznych, przedstawianie ich w dynamiczny, a nie statyczny sposób.	9,0%	47,1%	36,1%	7,7%	0,07
Samokontrola lub kontrola wiedzy ucznia	9,0%	40,6%	37,4%	12,9%	-0,04
Rozwiązywanie zadań w wersji komputerowej	3,9%	39,4%	44,5%	12,3%	-0,15
Wyćwiczenie określonych procedur i schematów postępowania	5,2%	40,0%	38,1%	16,8%	-0,16
Ułatwienie znalezienia rozwiązania zadania	3,2%	35,5%	40,6%	20,6%	-0,29
Poszukiwanie nowych (innych) sposobów rozwiązania zadania	3,9%	30,3%	47,1%	18,7%	-0,31
Badanie problemów, których rozwiązanie byłoby niedostępnie przy użyciu tradycyjnych środków	2,6%	37,4%	34,2%	25,8%	-0,33

Nauczyciele zostali zapytani również o rodzaj programów komputerowych, z jakich korzystają na lekcjach matematyki. Najwięcej osób (77 %) odpowiedziało, że co najmniej kilka razy w semestrze wykorzystuje programy do edycji tekstów. Nieco mniej wskazań otrzymały programy do prezentacji multimedialnych (74 %).

Ok. 67 % badanych zadeklarowało, że bardzo często lub często wykorzystuje zadania matematyczne dostępne na stronach internetowych. Poproszeni o wytypowanie stron, z których korzystają najczęściej, wskazali łącznie 63 różne strony, przy czym aż 32 strony zostały podane tylko jednokrotnie. Najczęściej nauczyciele wymieniali strony wydawnictw (GWO, Nowa Era, WSiP) oraz strony https://www.matzoo.pl/ oraz https://learningapps.org/ (wykres 2.).



Wykres 2. Najczęściej wykorzystywane przez badanych nauczycieli strony internetowe z zadaniami matematycznymi

Niektórzy nauczyciele, korzystają z kilku różnych stron internetowych, inni preferują jedną lub dwie. Wśród badanych były jednak i takie osoby, które pomimo że zadeklarowały, że często wykorzystują zadania zamieszczone na stronach internetowych nie potrafiły podać żadnej z nich (tabela 2.).

Tabela 2. Rozkład odpowiedzi na pytanie częstość i liczbę wykorzystywanych stron internetowych z zadaniami matematycznymi

		Liczba wskazanych stron internetowych						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5 i więcej**	**razem**
Częstość wykorzystania stron internetowych	**nigdy lub prawie nigdy**	15	2	0	1	0	0	**18**
	rzadko	13	8	3	6	3	0	**33**
	często	13	13	16	16	10	6	**74**
	bardzo często	2	6	7	9	3	3	**30**
	razem	**43**	**29**	**26**	**32**	**16**	**9**	**155**

Zdecydowana większość, bo 141 nauczycieli (91 %) zadeklarowało, że zaleca uczniom rozwiązywanie zadań matematycznych w wersji elektronicznej, a 128 (83 %) – że wdraża ich do rozwiązywania takich zadań. Na pytanie o to, w jaki sposób uczą uczniów rozwiązywania zadań w wersji elektronicznej i jak organizują pracę nad takimi zadaniami, nauczyciele wymieniali: korzystanie z zadań pochodzących ze stron internetowych, prezentowanie różnych programów komputerowych i ich możliwości, wyświetlanie tekstów zadań na ekranie podłączonym do rzutnika multimedialnego, korzystanie z tablicy multimedialnej, stosowanie gier komputerowych i quizów, używanie tabletów. Dziewięciu badanych zadeklarowało, że sami tworzą dla uczniów zadania w wersji interaktywnej i zamieszczają je np. na platformie moodle lub na własnych stronach internetowych.

Jednak, jak wynika z odpowiedzi nauczycieli, niektórzy z nich swoiście rozumieli „korzystanie z zadań zamieszczonych na stronach internetowych". Nie mieli oni na myśli bezpośredniego zastosowania zadań w wersji elektronicznej w warunkach klasowo – lekcyjnych. Chodziło im o fazę przygotowania do lekcji, gdy korzystając z zasobów internetu, sami wyszukują zadania, które zamierzają użyć w pracy z uczniami. Co więcej, niektórzy badani przyznali, że po wybraniu takich zadań drukują je i oferują uczniom w wersji tradycyjnej, papierowej. W tej sytuacji rola środków IT i zasobów internetowych zostaje zredukowana do funkcji pomocniczej w przygotowaniu kart pracy w postaci papierowej. To też tłumaczy duży odsetek wskazań programów do edycji tekstów. Wśród badanych byli też tacy, którzy twierdzili, że zalecają uczniom rozwiązywanie zadań matematycznych, zamieszczonych na stronach internetowych do samodzielnej pracy w domu. Czasami wskazują uczniom strony internetowe, na których znajdują się takie zadania, innym razem uczniowie sami muszą je wyszukać. Nauczyciele nie kontrolują przy tym, czy uczniowie wykonali ich polecenia, choć niektórzy badani przyznawali, że rozmawiali z uczniami o tych zadaniach. Oznacza to, że wielu uczniów nie jest specjalnie przygotowywanych do rozwiązywania zadań w wersji elektronicznej. Muszą oni samodzielnie wypracować najlepsze dla siebie sposoby rozwiazywania takich zadań.

Nauczyciele odpowiadali też na pytania dotyczące częstotliwości oferowania uczniom różnych typów zadań w wersji komputerowej (tabela 3.).

Tabela 3. Rozkład odpowiedzi na pytanie o typy zadań w wersji elektronicznej na lekcjach matematyki

	bardzo często	**często**	**rzadko**	**nigdy lub prawie nigdy**	**średnia**
zadanie interaktywne w formie zamkniętej	18,7%	34,8%	27,1%	19,4%	0,03
parainteraktywne zadanie statyczne	15,5%	34,8%	33,5%	16,1%	0,00
parainteraktywne zadanie dynamiczne	4,5%	25,2%	40,6%	29,7%	-0,45
interaktywna gra matematyczna	7,1%	20,0%	36,8%	36,1%	-0,52
zadanie właściwie interaktywne	4,5%	19,4%	39,4%	36,8%	-0,58

Relatywnie najczęściej nauczyciele wykorzystują zadania interaktywne w formie zamkniętej. Zadania takie mogą pełnić ważną rolę w procesie uczenia się matematyki, pod warunkiem, że uczeń potrafi właściwie je wykorzystywać do samokontroli posiadanych wiadomości i umiejętności.

Najrzadziej nauczyciele stosują zadania właściwie interaktywne. Może wynikać to z faktu, że zadania takie wymagają, aby każdy uczeń miał swobodny dostęp do komputera lub tabletu i mógł przeprowadzać eksperymenty, stawiać hipotezy i je weryfikować. Poza tym oferta takich zadań jest jeszcze stosunkowo uboga.

4. Zakończenie

Z przeprowadzonych badań wynika, że przeważająca większość badanych nauczycieli była świadoma tego, że w edukacji matematycznej konieczna jest integracja tradycyjnych i nowoczesnych (z użyciem IT) metod nauczania. Deklarowali oni, że wykorzystują środki IT oraz że zalecają uczniom rozwiązywanie zadań w wersji elektronicznej. Jednocześnie wielu z nich podało, że ich uczniowie nie mają możliwości indywidualnej, samodzielnej pracy przy komputerach, na tabletach czy na smartfonach. Wskazywali, że wynika to z braku odpowiedniego wyposażenia szkół w środki IT oraz braku dostępu do sal informatycznych. Często nauczyciele dysponują tylko tablicą interaktywną lub jednym komputerem podłączonym do rzutnika multimedialnego. Nie wykorzystują też na lekcjach prywatnego sprzętu uczniów lub robią to rzadko. Takie postępowanie jedni tłumaczą spersonalizowaniem smartfonów i trudnościami związanymi z kontrolą pracy uczniów, inni – zakazami używania telefonów w szkołach, a jeszcze inni – przekonaniem, że na lekcjach należy używać tylko sprzętu, który jest zapewniony przez szkołę. Nie dziwi więc, że wielu nauczycieli tylko pozornie wdraża uczniów do rozwiązywania zadań w wersji elektronicznej. Co prawda, na lekcjach pojawiają się zadania parainteraktywne, których teksty są wyświetlane na ekranie monitora, ale uczniowie rozwiązują je w tradycyjny, konserwatywny sposób, na papierze, bez użycia środków IT. Relatywnie częstą praktyką jest też zalecanie uczniom, aby rozwiązywali zadania w wersji elektronicznej w trakcie samodzielnej pracy w domu.

Znacznie mniej liczną grupę stanowili nauczyciele, którzy, choćby okazjonalnie, oferują uczniom zadania interaktywne w formie zamkniętej lub właściwie interaktywne. Warto podkreślić, że organizując pracę nad takimi zadaniami kierują się zazwyczaj intuicją, subiektywnymi przekonaniami i własnymi spostrzeżeniami. Tylko nieliczni nauczyciele systematycznie wdrażają uczniów do rozwiązywania różnych typów zadań matematycznych w wersji elektronicznej i stwarzają im okazję do samodzielnego rozwiązywania takich zadań. Zazwyczaj w tym celu wykorzystują tablety, zapewnione przez szkołę.

Należy też zauważyć, że niektórzy badani nauczyciele tworzą swoje zestawy zadań i zamieszczają je na platformach, do których ich uczniowie mają dostęp, lub na własnych stronach internetowych.

Wśród badanych zdecydowaną mniejszość stanowili nauczyciele, którzy zadeklarowali, że nie wykorzystują środków IT na lekcjach matematyki. Takie postępowanie uzasadniali brakiem sprzętu i możliwości albo przekonaniem, że aby nauczyć się matematyki wystarczy kartka i długopis. W ich opinii wszelkie środki IT, to „zbędne gadżety", które tylko przeszkadzają w nauce i odciągają uczniów od tego, co jest istotne w matematyce. Warto zauważyć, że w praktyce odsetek nauczycieli, którzy nie wykorzystują IT w edukacji matematycznej może być większy, gdyż w ankiecie i wywiadach wzięli udział nauczyciele, którzy sami sprawnie posługują się środkami IT i wykorzystują je w różnych celach w codziennej pracy.

ISSN 2694-8133

Literatura

Bednarek J. (2006). *Multimedia w kształceniu*. Warszawa: PWN.

Bąk A. (2015). *Korzystanie z urządzeń mobilnych przez małe dzieci w Polsce. Wyniki badania ilościowego.* Warszawa: Fundacja Dzieci Niczyje. Dostęp z https://fdds.pl/kategoria_bazy/raporty-z-badan/.

Bugajska – Jaszczołt, B., Czajkowska, M. (2008). Znaczenie technologii informacyjnej dla rozumienia definicji matematycznej (na przykładzie pojęcia brzegu figury). (s. 174–183). In: Lewowicki T. Siemieniecki B. (red.) *Media w procesie informacyjno - komunikacyjnym*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek.

Czajkowska, M. (2009). IT as a means of reducing mathematical helplessness. In: *IMEM* 2009 *Interdisciplinary Relationships in the Theory and Practice oh Informatics, Management, Economics and Mathematics*, *Proceedings of International Congress.* (s. 518–529). Ružomberok: Catholic University in Ružomberok.

Czajkowska M. (2016a) Wpływ formy udostępniania zadań matematycznych na poziom ich rozwiązania (na przykładzie badań gimnazjalistów). *Ruch pedagogiczny* 2/2016, 55–64.

Czajkowska (2016b). *To what extent can a computer replace geometrical solid model manipulation? (on certain aspects of teaching spatial geometry in middle school).* In: Maj–Tatsis B., Pytlak M., Swoboda E. (ed.) *Inquiry based mathematical education* (s. 232–242). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Czajkowska M. (2016c). What strategies are used by middle school students while solving mathematical tasks in a digital form. *International Journal of Pedagogy, Innovation and New Technologies* 3 (2), 102–109. Dostęp z: http://ijpint.com/resources/html/article/details?id=139751.

Gruszczyk – Kolczyńska E. (1992). *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: WSiP.

Juszczak B. (2013). Jak nowe technologie wpływają na rozwój dzieci? *Socialpress*. Dostęp z https://socialpress.pl/2013/09/jak-nowe-technologie-wplywaja-na-rozwoj-dzieci.

Kąkol, H., Ratusiński T. (2004). Rola komputera w procesie rozwiązywania matematycznych zadań. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Series V. *Dydaktyka Matematyki*, 26. 119–142.

Kąkol, H. (2006). Cele nauczania matematyki i rola technologii informacyjnej w ich realizacji. In: M. Czajkowska, G. Treliński (red.) *Kształcenie matematyczne. Tendencje, badania, propozycje dydaktyczne* (s. 37–46). Kielce: Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej.

Kąkol, H., Pająk W. (2009). Rola programu komputerowego CABRI w rozwiązywaniu matematycznych problemów. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, vol. II. 69–96.

Kram, A., Mielcarek, M. (2014). Wczesna edukacja dziecka. In: Brzezińska A. I. (red.) *Niezbędnik Dobrego Nauczyciela*, Tom 1 seria III. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych. Dostęp z: http://eduentuzjasci.pl/publikacje-ee-lista/224-niezbednik-dobrego-nauczyciela/seria-3-edukacja-w-okresie-dziecinstwa-i-dorastania/1209-iezbednik-dobrego-nauczyciela-seria-3-edukacja-w-okresie-dziecinstwa-i-dorastania.html

Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. Część 3. Warszawa: WSiP.

Kutzler, B. (2000). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*. Dostęp z http://cchsindy.org/bird/Smart/Calc1/AlgebraicCalculatorPedtoolKutzler.pdf.

Makiewicz M. (2010). Nauka matematyki z komputerem. In: Kozielska M. (red.) *Technologie informacyjne w poznawaniu wiedzy matematyczno-przyrod*niczej (s. 115–127). Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek.

Makiewicz M. (2004). Twórczość matematyczna uczniów gimnazjów posługujących się środkami komputerowymi. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Series V. *Dydaktyka Matematyki,* 27, 265–279.

Morbitzer J. (2011). Odpowiedzialność jako kategoria aksjologiczna w świecie współczesnych mediów. In: Lewowicki T. Siemieniecki B. (red.) *Technologie edukacyjne – tradycja. Współczesność. Przewidywana przyszłość.* (s. 47–59). Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek.

Parcia, K. (2004). Prowadzenie rozumowań matematycznych a komputer – analiza pracy uczniów nad rozwiązywaniem pewnego zadania (fragment badań wstępnych). Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Series V. *Dydaktyka Matematyki*, 26. 143–163.

Wasielewski M. (2015). Światowe tendencje rozwoju technologii edukacyjnych. In: Denek K., Kamińska A., Oleśniewicz P. (red.) *Edukacja jutra. Nowe technologie w kształceniu* (s. 19–32). Sosnowiec: Wyższa Szkoła Humanitas.

ISSN 2694-8133

O VSTUPNÝCH VEDOMOSTIACH ŠTUDENTOV UČITEĽSTVA PRE PRIMÁRNE VZDELÁVANIE Z UČIVA MATEMATIKY NA PRVOM STUPNI ZÁKLADNEJ ŠKOLY

Jana FIALOVÁ, Milan POKORNÝ
Trnavská Univerzita, Pedagogická fakulta (Slovenská republika)
jana.fialova@truni.sk, mpokorny@truni.sk

Abstrakt

Štátny vzdelávací program definuje štandardy pre vyučovanie matematiky na prvom stupni základnej školy. Nájdeme tu však aj témy, s ktorými majú problém aj absolventi stredných škôl, ktorí následne pokračujú v štúdiu učiteľstva pre primárne vzdelávanie. V článku analyzujeme výsledky vstupného testu z predmetu Primárne matematické vzdelávanie, ktorý bol zameraný na odhalenie problémov študentov pri riešení vybraných úloh z matematiky prvého stupňa základnej školy. Analýza výsledkov ponúka čitateľovi nielen prehľad problematických častí z učiva matematiky, ale aj najčastejšie chyby študentov pri ich riešení. Vďaka výsledkom analýzy je následne možné prispôsobiť výučbu predmetu Primárne matematické vzdelávanie tak, aby sme nedostatky študentov v tejto oblasti čo najviac eliminovali.

Kľúčové slová: vyučovanie matematiky, primárne matematické vzdelávanie, elementárna matematika

ON THE KNOWLEDGE OF PRIMARY EDUCATION TEACHING STUDENTS FROM ELEMENTARY MATHEMATICS

Abstract

The State Educational Program defines standards for mathematics teaching at elementary schools in Slovakia. However, there are some topics that make problems even to the students of Primary Education Teaching at our university. In the paper we analyze the results of the entrance test from the subject Primary Mathematics Education, which aimed to reveal the problems of our students in solving elementary mathematics tasks. The analysis of the results offers not only the list of the most problematic tasks, but also the most common mistakes. Thanks to the analysis it is possible to plan the teaching of Primary Mathematics Education by a way that leads to the elimination of the shortcomings of our students in elementary mathematics.

Keywords: mathematics teaching, primary mathematics education, elementary mathematics

1. Úvod

Štátny vzdelávací program (2014, ďalej ŠVP) definuje výkonový a obsahový štandard pre vyučovanie matematiky na prvom stupni základnej školy. Ak si ich pozorne pozrieme, zistíme, že je tu viacero tém, ktoré častokrát robia problémy nielen žiakom základných škôl, ale aj absolventom stredných škôl, najmä tým, ktorí neabsolvujú maturitnú skúšku z matematiky. Medzi tieto témy patria napríklad zostrojenie osovo súmerného útvaru v štvorcovej sieti, zaokrúhľovanie, dopĺňanie čísel do postupností, určovanie istého javu, systematické vypísanie

ISSN 2694-8133

čísel vytvorených z daných číslic podľa určených vlastností, grafické znázornenie kmeňového zlomku, grafický súčet a rozdiel úsečiek, správne chápanie pojmov kružnica a kruh. S problémami pri ovládaní týchto tém sa stretávame aj u študentov odboru Učiteľstvo pre primárne vzdelávanie (ďalej UPV), ktorí sa po bakalárskom štúdiu v odbore Predškolská a elementárna pedagogika rozhodli pokračovať v magisterskom štúdiu UPV.

Je všeobecne známe, že absolventi UPV, ktorí následne pôsobia ako učitelia na prvom stupni základnej školy, vyučujú aj matematiku ako jeden z predmetov s najväčšou hodinovou dotáciou. Musia teda byť dostatočne pripravení na plnenie cieľov stanovených v ŠVP, a teda nemôžu mať nedostatky priamo v tom, čo majú vyučovať. V opačnom prípade sa ich nedostatočné vedomosti automaticky premietnu do nedostatočnej úrovne vedomostí ich žiakov. Hill, Rowan a Ball (2005) preukázali, že matematické vedomosti učiteľov majú zásadný vplyv na úroveň vedomostí žiakov (aj na prvom stupni).

Na nedostatky študentov UPV v elementárnych matematických vedomostiach upozorňujú aj viaceré domáce a zahraničné vedecké štúdie. Žilková (2014) konštatuje, že „zahraničné aj domáce výskumy často poukazujú na pomerne nízku úroveň poznatkov z geometrie“. Ďalej uvádza, že „v mnohých prípadoch nedokážu študenti rozpoznať geometrický útvar (zobrazený najmä v netradičnej polohe), a tiež nepoznajú dôsledne vlastnosti konvexných štvoruholníkov, ktoré ich predurčujú ku správnej kategorizácii“. Fujita a Jones (2006) konštatujú, že geometrické vedomosti študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie sú najslabšie spomedzi matematických vedomostí. Marchis (2012) konštatuje, že je veľmi dôležité, aby učitelia na prvom stupni základnej školy mali dobré vedomosti z oblasti elementárnej geometrie. Jej výskumy ukazujú, že viacerí študenti nedokážu rozoznávať základné geometrické útvary a telesá, pričom až dve tretiny študentov nedokážu správne definovať geometrické útvary. Martínez–Artero a Checa (2018) vo svojom výskume zameranom na vedomosti študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie z učiva elementárnej matematiky zistili vážne nedostatky študentov najmä pri práci so zlomkami, desatinnými číslami a percentami.

2. Problematické časti v učive elementárnej matematiky pre študentov UPV

V našom prieskume sa zaoberáme problémami, ktoré majú študenti UPV v oblasti učiva matematiky na prvom stupni základnej školy, ktoré je stanovené v obsahovom a výkonovom štandarde ŠVP. Našou snahou je vyhľadať problematické oblasti a navrhnúť opatrenia na odstránenie nedostatkov vo vedomostiach študentov tak, aby po absolvovaní magisterského štúdia boli lepšie pripravení plniť úlohy vyplývajúce z ich budúcej profesie.

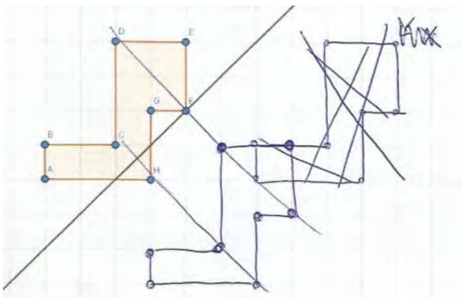
Je potrebné upozorniť na skutočnosť, že na UPV sa hlási väčšina študentov, ktorí neabsolvovali maturitnú skúšku z matematiky a tak nemožno predpokladať vstupnú úroveň ich matematických vedomostí na úrovni cieľových požiadaviek na maturitnú skúšku. Mnohí z nich dokonca deklarujú, že ich vzťah k matematike nie je veľmi pozitívny. Treba si však uvedomiť, že títo študenti budú takmer každý deň vyučovať aj matematiku. K tomu je nutné nielen to, aby dokonale ovládali učivo matematiky na prvom stupni, ale aj to, aby mali dostatočné vedomosti z oblasti teórie vyučovania matematiky.

Aby sme boli schopní objektívne určiť problémové oblasti učiva matematiky prvého stupňa základnej školy, realizovali sme na začiatku zimného semestra 2018/2019 prieskum na vzorke 43 denných študentov prvého ročníka magisterského štúdia UPV. Študenti písali vstupný test, ktorý pozostával z trinástich úloh, ktoré sme vybrali na základe našich predchádzajúcich skúseností získaných počas vyučovania predmetov matematického zamerania u študentov UPV. Pripomíname, že všetkých 13 úloh vychádza zo štandardov definovaných v ŠVP pre prvý stupeň základnej školy.

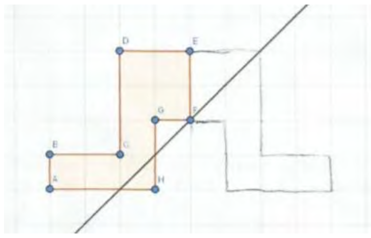
ISSN 2694-8133

V prvej úlohe mali študenti zobrazený mnohouholník *ABCDEFGH* v štvorcovej sieti a ich úlohou bolo opísať postup jeho nakreslenia pomocou symbolov →,←,↓,↑ tak, že začiatok je v bode *A* (pozri obrázok 1). Uvedenú úlohu správne vyriešilo iba 30 % študentov. Vysoká chybovosť bola zrejme spôsobená tým, že študenti sa s takouto úlohou ešte nestretli. Deviati študenti napísali taký zápis, pri ktorom uvádzali len smery, ale nie počet políčok, o ktoré sa treba presunúť. Trinásti študenti písali šípky pozdĺž strán mnohouholníka (pozri obrázky 4 a 5) a ôsmi úlohu vôbec neriešili.

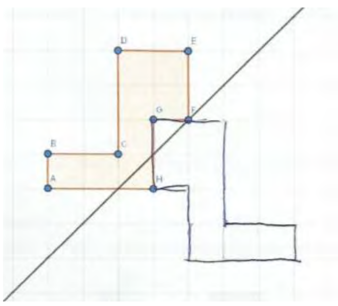
V druhej úlohe mali študenti zobrazený mnohouholník *ABCDEFGH* v štvorcovej sieti, v ktorej bola zároveň narysovaná os (pozri obrázok 1). Úlohou bolo dokresliť osovo súmerný mnohouholník s mnohouholníkom *ABCDEFGH*. Uvedenú úlohu správne vyriešilo iba 49 % študentov. Pri tejto úlohe nemôžeme predpokladať, že študenti nevedeli, čo majú robiť. S osovou súmernosťou sa stretávali žiaci na základných školách aj v rokoch, kedy boli naši študenti žiakmi. Napriek tomu sa vyskytli viaceré zarážajúce chyby. Sedem študentov použilo posunutie v horizontálnom smere alebo v smere kolmom na os súmernosti (obrázok 1), jeden študent použil vlastnú os súmernosti – vertikálnu (obrázok 2). Šiesti študenti vytvorili zhodný útvar neuvedomelým použitím iných typov zhodných zobrazení – otočenie alebo posunutá súmernosť (obrázok 3 a 4). Na obrázku 5 vidíme riešenie študenta, ktorý sa snažil vytvoriť zhodný útvar – použil osovú súmernosť s horizontálnou osou a posunutie so smerom, ktorého dôvod je ťažko odhadnúť. Jeden študent dokonca vytvoril útvar, ktorý nie je zhodný s daným vzorom (obrázok 6). Študent si v tomto prípade pamätal, že vzdialenosť vzoru a obrazu je od osi súmernosti zhodná, avšak vzdialenosť nemeral v smere kolmom na os súmernosti, ale v horizontálnom smere. Siedmi študenti úlohu neriešili – nevytvorili žiaden mnohouholník. Viaceré chyby sú zrejme spôsobené tým, že študenti sú zvyknutí na osovú súmernosť s vertikálnou osou súmernosti.



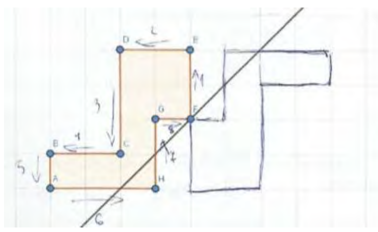
Obrázok 1



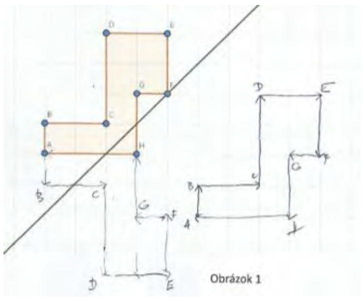
Obrázok 2



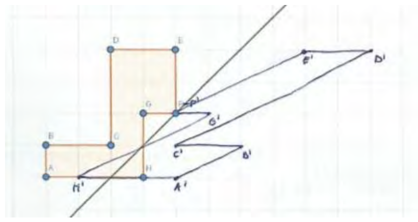
Obrázok 3



Obrázok 4



Obrázok 5



Obrázok 6

V tretej úlohe mali študenti zaokrúhliť číslo 15 376 na tisícky, číslo 76 na tisícky a číslo 8 550 na stovky. Všetky tri časti uvedenej úlohy správne vyriešilo iba 26 % študentov. Problémom bola najmä časť b), kde bolo treba zaokrúhliť číslo 76 na tisícky. Pätnásť študentov túto časť vôbec neriešilo alebo napísali, že sa to nedá, siedmi napísali výsledok v tvare desatinného čísla, napr. 0,007 6; 0,076 alebo 0,08 či 0,008. Vyskytli sa aj zvláštne riešenia ako 1 000, 76 000, 80 000. Traja ponechali číslo 76. Chyby sa však vyskytli aj v bežných úlohách a) a c). Číslo 15 376 nesprávne zaokrúhlilo na tisícky päť študentov, ich výsledky boli napr. 15 300 či 15 400. Číslo 8 550 na stovky nesprávne zaokrúhlilo 9 študentov. Z odpovedí vyberáme: 8 900; 8 650; 8 560; 85,5 alebo 500. Takáto chybovosť v klasickej úlohe prvého stupňa základnej školy je skutočne zarážajúca.

V štvrtej úlohe mali študenti doplniť ďalšie štyri čísla do postupnosti 1, 2, 2, 4, 3, 6, 4, 8, 5,... Uvedenú úlohu správne vyriešilo iba 33 % študentov. Väčšina chýb sa týkala nesprávneho pochopenia zadania – štrnásti študenti dopĺňali viac alebo menej ako štyri čísla. Ak by sme tieto riešenia považovali za správne, stále by sme mali iba 65 % úspešnosť. Sedem študentov neodhalilo vzťah, na základe ktorého sú čísla v postupnosti zaradené, takže udávali nesprávne čísla. Osem študentov úlohu neriešilo.

V piatej úlohe bolo dané, že vo vrecku máme tri modré, dve červené a štyri zelené guľôčky. Študenti mali určiť, koľko najmenej z nich musíme vytiahnuť, aby sme mali istotu, že medzi vytiahnutými bude aspoň jedna zelená guľôčka. Uvedenú úlohu správne vyriešilo 67 % študentov. Medzi nesprávnymi odpoveďami sa vyskytli čísla 3, 4, 5, alebo 9 – všetky. Štyria študenti úlohu neriešili.

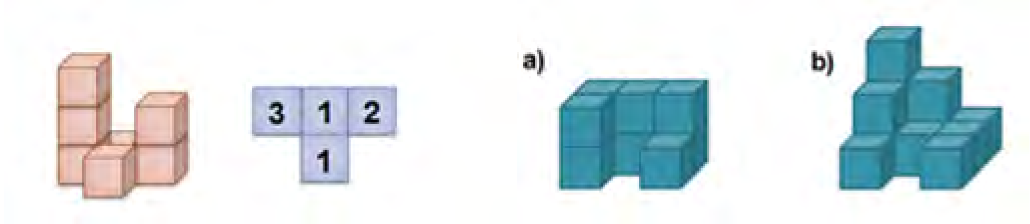
V šiestej úlohe mali študenti vypísať všetky štvorciferné čísla zložené z číslic 0, 1, 2, 3, pričom číslice sa v čísle nemôžu opakovať. Uvedenú úlohu správne vyriešilo 65 % študentov. Zaujímavosťou je, že sa nevyskytol ani jeden prípad neriešenia tejto úlohy. Najčastejšou chybou boli chýbajúce možnosti (v desiatich prípadoch). Traja študenti uviedli medzi štvorcifernými číslami aj čísla s nulou na mieste tisícok.

V siedmej úlohe mali študenti napísať súčin súčtu a rozdielu čísel 7 a 5. Uvedenú úlohu správne vyriešilo 86 % študentov. Chybu spravilo iba šesť študentov. Chyby sú v niektorých prípadoch ťažko pochopiteľné, preto ich uvádzame všetky spolu s komentárom k možnej príčine chyby:

- *7 + 5 = 12, 1 · 2 = 2 dvojka podčiarknutá ako odpoveď* – študent urobil ciferný súčin súčtu pre neznalosť pojmov,
- *súčin - 35, rozdiel - 2* – číslo 35 ako výsledok si nedokážeme vysvetliť,
- *= 12 (a pod tým) 3* – nedokončené riešenie a zároveň nesprávne odčítané 7 – 5 = 3,
- *12 · 1, 4 = 16, 8* – namiesto rozdielu bol robený podiel,
- *7 + 5 · (7 - 5) = 12 · 3 = 36* – nesprávne odčítané a aj nesprávna priorita operátorov,
- *7 + 5 = 12* – nedokončené riešenie.

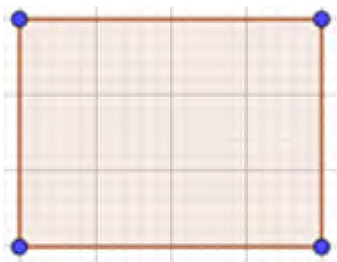
ISSN 2694-8133

V ôsmej úlohe mali študenti ako ukážku stavbu z kociek a jej plán. Ich úlohou bolo nakresliť plány pre zvyšné dve stavby (pozri obrázok 7). Uvedenú úlohu správne vyriešilo 91 % študentov. Jeden študent nakreslil pôdorys bez vyznačenia počtu kociek v stĺpiku, jeden študent spravil chybu v tom, že dve kocky v stavbe a) vľavo vpredu, ktoré sú na sebe, zaznačil tak, akoby boli za sebou, dvaja študenti úlohu neriešili.



Obrázok 7. Obrázok k úlohe 8

V deviatej úlohe mali študenti vyfarbiť jednu šestinu čokolády (pozri obrázok 8). Uvedenú úlohu správne vyriešilo 74 % študentov. Úloha patrí k základným úlohám, s ktorými sa stretáva žiak prvého stupňa základnej školy. Zvolili sme jednoduchý kmeňový zlomok. Napriek tomu sa vyskytlo 11 chybných riešení. Štyria študenti vyznačili šesť z dvanástich kúskov čokolády, dvaja jeden kúsok, dvaja polovicu z jedného kúska, jeden študent vyznačil tri kúsky, jeden desať kúskov a jeden nič.



Obrázok 8. Obrázok k úlohe 9

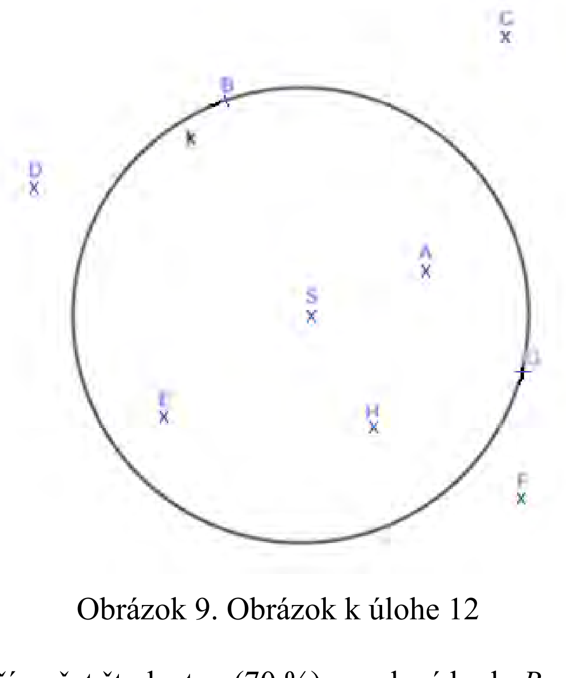
V desiatej úlohe mali študenti sformulovať text slovnej úlohy k numerickému zápisu 2 + 3 · 7. Uvedenú úlohu správne vyriešilo iba 47 % študentov. Za chybu sme považovali aj formulácie, ktoré nie sú slovnou úlohou, ale len slovným opisom matematickej úlohy (chýbajúci kontext). Ako príklad uvádzame: „K súčinu 3 a 7 pripočítaj 2.“ Takýchto riešení bolo desať. Siedmi študenti nesformulovali žiadnu úlohu. Šiesti študenti sa dopustili iných chýb, ktoré uvádzame spolu s možnými príčinami:

- *„V triede je 7 detí. Každé dieťa dostane 2 jablká a 3 hrušky. Koľko hrušiek a jabĺk treba do triedy kúpiť? (Ak nepoznajú pravidlá prednosti násobenia.) V triede je 7 detí, ktoré dostanú po 3 jablká a jedno dieťa, ktoré dostane 2 hrušky. Zapíš príklad a správne vypočítaj.“* – študent si uvedomil chybu v prvej úlohe, druhou ju odstránil, avšak urobil novú chybu vo formulácii výzvy.
- *„V triede je 23 žiakov. Siedmi z nich majú každý po 3 známky v ŽK z matematiky. Zvyšok triedy má iba po 2 známky. Koľko žiakov má po 3 známky a koľko žiakov po 2 známky?“* – študent si najprv vypočítal zadanú úlohu a potom skúsil vytvoriť slovnú úlohu použijúc dané čísla bez snahy predstaviť si danú situáciu.
- *„Na vyriešenie slovnej úlohy použijeme č. 2, 3, 7. Následne s týmito číslami vykonáme úkony: sčitovanie a násobenie. Treba si premyslieť kt. operácia má prednosť? 2+(3.7)=2+21=23“* – študent nepochopil zadanie úlohy.

- *„Janko si dnes kúpil 2 cukríky a 3 čokolády. Keďže mu sladkosti začali veľmi chutiť začal chodiť do obchodu každý deň aby si nakúpil tieto sladkosti. Koľko má Janko sladkostí na konci týždňa v nedeľu?"* Študent neovláda pravidlo prednosti násobenia pred sčítavaním. Úloha nemá jednoznačné riešenie – nevieme, ktorý deň začal (študent zrejme myslel na pondelok, ale do textu to neuviedol) a zabudol na fakt, že Janko by mohol sladkosti aj postupne jesť.
- *„Ráno som zjedla 2 jablká. Potom som každú hodinu od 12:00 do 19:00 zjedla tri hrozienka. Koľko ovocia som zjedla počas dňa ak som nič iné okrem jabĺk a hrozienok nezjedla?"* tu sa stretávame s pomerne bežnou chybou – medzi 12tou a 19tou síce prejde sedem celých hodín, ale hrozienka pojedá osemkrát.
- *„Spočítaj 2 jablká a 3 hrušky a zisti koľko jabĺk a hrušiek potrebuješ, aby mali tvoji 7 spolužiaci rovnaký počet hrušiek a jabĺk."* Študent si zrejme neuvedomil prioritu operátorov. Výzva je v danom kontexte úplným nezmyslom.

V jedenástej úlohe mali študenti napísať postup, ako graficky určia súčet daných úsečiek *AB* a *CD*. Uvedenú úlohu správne vyriešilo iba 28 % študentov, pričom za správne vyriešenú úlohu sme považovali každý taký zápis, podľa ktorého sa dá usudzovať, že študent vie grafický súčet vykonať. Ak by sme vyžadovali naozaj matematicky korektne zapísaný postup, správnych riešení by bolo nula. Zaujímavosťou tejto úlohy je vysoký počet neriešenosti – 40 %, čo si možno vysvetliť tým, že študenti vôbec nevedeli, čo majú robiť. Je otázne, či sa s takouto úlohou stretli.

V dvanástej úlohe bola daná kružnica *k* a body *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *S* (pozri obrázok 10). Študenti mali určiť, ktoré body patria kružnici *k*, ale nie kruhu *K*. Potom mali určiť, ktoré body patria kruhu *K*, ale nie kružnici *k*. Napokon mali určiť, ktoré body patria kružnici *k* aj kruhu *K*. Všetky tri časti uvedenej úlohy správne vyriešilo iba 7 % študentov.



Obrázok 9. Obrázok k úlohe 12

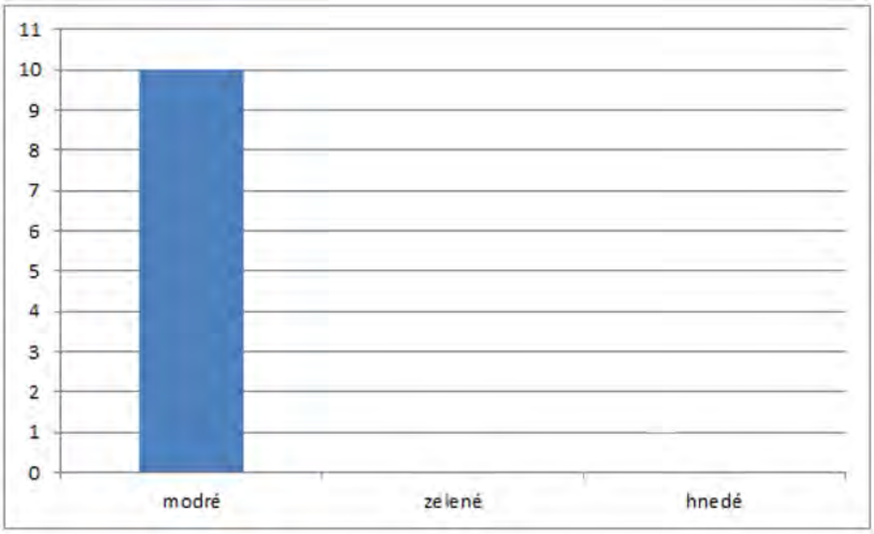
V časti a) mal najväčší počet študentov (70 %) zaradené body *B* a *G* medzi tie, ktoré patria kružnici, ale nepatria kruhu. Všetci títo študenti až na jedného uviedli body *B* a *G* aj do odpovede c), kde mali zapísať body, ktoré patria kružnici aj kruhu. Zároveň sem vpisovali aj všetky vnútorné body kruhu – *A*, *H*, *E* a niektorí *S*. Je zaujímavé, že niektorí študenti majú problém považovať stred kruhu za bod, ktorý kruhu patrí.

ISSN 2694-8133

Chyby, ktoré sme tu spomenuli súvisia zrejme skôr s problémom v oblasti výrokovej logiky. Zároveň môžeme pozorovať neistotu študentov v tom, či body kružnice patria kruhu, ktorý je ňou určený alebo nie.

Časť b), kde určovali body patriace kruhu, ale nie kružnici obsahovala výrazne menej chýb – šesť, z toho polovica uviedla aj body mimo kruhu – *D*, *C* a *F*.

V trinástej úlohe bolo dané, že do triedy chodí 22 detí. Z nich je 10 modrookých, 5 zelenookých a ostatné sú hnedooké. Úlohou študentov bolo dokresliť stĺpcový diagram (pozri obrázok 10). Uvedenú úlohu vyriešili správne všetci študenti.



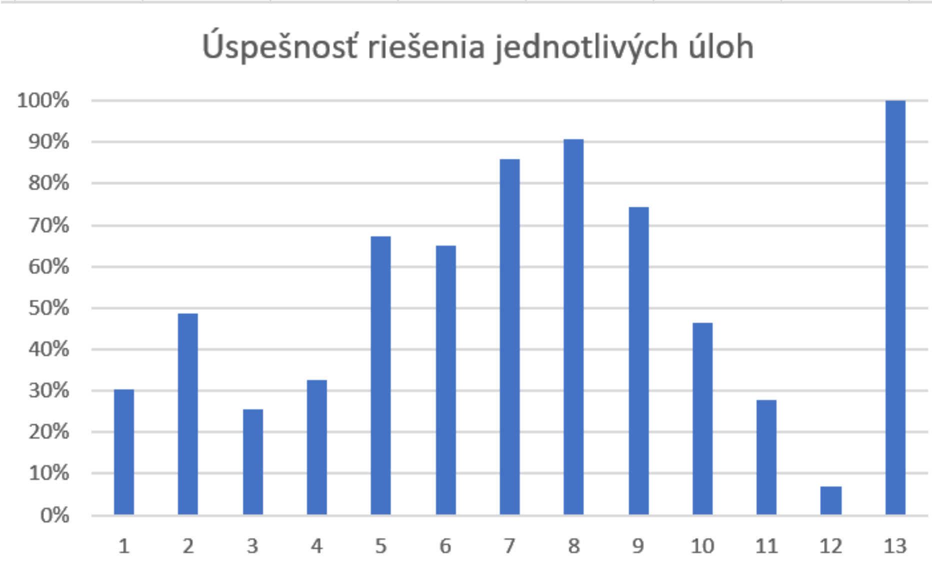
Obrázok 10. Obrázok k úlohe 13

3. Záver

Z vyššie uvedených výsledkov je zrejmé, že analýza výsledkov vstupného testu preukázala značné nedostatky vo vedomostiach študentov UPV z oblasti matematiky. Celková úspešnosť riešenia úloh bola iba 54 %. Úlohu na opis obrázka v štvorcovej sieti pomocou symbolov ↑, →, ↓, ← zvládlo iba 26 % študentov. Dokreslenie osovo súmerného obrázka v štvorcovej sieti malo správne 47 % študentov (obe úlohy patria do výkonových štandardov pre primárne vzdelávanie). Iba 26 % študentov správne zaokrúhlilo dané čísla, 33 % študentov doplnilo správne čísla do postupnosti 1, 2, 2, 4, 3, 6, 4, 8, 5,..., iba 47 % sformulovalo úlohu, ktorej výpočet je $2 + 3 \cdot 7$, 28 % študentov vedelo opísať postup pri grafickom súčte úsečiek a iba 7 % študentov správne určilo podľa daného obrázka, ktoré body patria kružnici či kruhu. Zhrnutie úspešnosti študentov v riešení úloh je znázornené na grafe 1. V tabuľke 1 vidíme početnosť študentov podľa počtu správne vyriešených úloh. Ani jeden študent nevyriešil správne všetky úlohy. Dvaja študenti vyriešili iba dve úlohy. Menej ako polovica študentov zvládla vyriešiť správne aspoň osem z trinástich zadaných úloh.

Tabuľka 1: Počet študentov, ktorí správne vyriešili daný počet úloh

správne odpovede	počet študentov	kumulatívna početnosť
13	0	0,00%
12	1	2,33%
11	2	6,98%
10	4	16,28%
9	6	30,23%
8	7	46,51%
7	5	58,14%
6	6	72,09%
5	3	79,07%
4	6	93,02%
3	1	95,35%
2	2	100,00%



Graf 1. Úspešnosť študentov v riešení úloh

Uvedené výsledky sú v zhode s viacerými výsledkami publikovanými inými výskumníkmi. Potvrdilo sa napríklad tvrdenie z úvodu článku od Žilkovej (2014) o nízkej úrovni poznatkov z geometrie. Taktiež sa potvrdili problémy študentov UPV spojené s tvorbou symetrických geometrických útvarov v štvorcovej sieti, na ktoré upozorňuje Žilková (2016). Podobne sa potvrdili aj problémy s riešením kombinatorických úloh, na ktoré u študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky poukázali Holý a Pokorný (2018). Je škoda, že študenti UPV majú nedostatočné vedomosti práve v tejto oblasti, nakoľko podľa Scholtzovej (2003) mnoho problémových situácií z kombinatoriky môže byť zaujímavých pre žiakov a zároveň sa im poskytuje možnosť skúmania a objavovania. Naviac, dajú sa v nej nájsť aktivity vhodné pre výborných žiakov, ale aj také, ktoré sú primerané pre žiakov menej úspešných v matematike.

Podľa nášho názoru, analýza výsledkov jednoznačne potvrdila nutnosť systematickej práce so študentmi UPV na hodinách predmetu Primárne matematické vzdelávanie. Prieskum totiž

ISSN 2694-8133

preukázal, že časť študentov na začiatku svojho štúdia nespĺňa ani požiadavky na vedomosti a zručnosti absolventa základnej školy stanovené v Inovovanom štátnom vzdelávacom programe. Naša systematická práca na hodinách predmetu Primárne matematické vzdelávanie preto bude okrem iného zameraná aj na elimináciu nedostatkov vo vedomostiach týchto študentov z učiva matematiky prvého stupňa ZŠ, ktoré sme odhalili v rámci vyššie opísaného prieskumu. Je nevyhnutné zamerať sa aj na opisy obrázkov v štvorcovej sieti pomocou symbolov ↑, →, ↓, ←, kreslenie osovo súmerných obrázkov v štvorcovej sieti (s osou súmernosti v horizontálnej polohe, vo vertikálnej polohe, ale najmä ak zviera uhol 45° s horizontálnou polohou), zaokrúhľovanie prirodzených čísel, dopĺňanie čísel do postupností a objavovanie zákonitostí, riešenie jednoduchých kombinatorických úloh systematickým vypisovaním možností, tvorbu slovných úloh k vopred danému spôsobu výpočtu úlohy, grafický súčet a rozdiel úsečiek, odstraňovanie miskoncepcií súvisiacich s pojmami kruh, kružnica, trojuholník, štvoruholník (a ich špeciálne typy). Riziko potenciálneho vplyvu miskoncepcií budúcich učiteľov na výkon ich budúcej profesie akcentuje vo svojej štúdii aj Žilková (2013), pričom uvádza všeobecnejšie problémy s tvorbou korektných matematických predstáv budúcich učiteľov pre primárne vzdelávanie.

Uvedomujeme si, že prieskum bol realizovaný iba na našej fakulte, a preto výsledky nemožno generalizovať aj na študentov iných fakúlt. Bolo by zaujímavé realizovať podobný prieskum aj na iných pedagogických fakultách a porovnať výsledné zistenia.

Acknowledgements

Príspevok vznikol aj vďaka podpore grantov KEGA 003UMB-4/2017 *Implementácia blended learningu do prípravy budúcich učiteľov matematiky* a KEGA 003TTU-4/2018 *Interaktívne aplikácie pre vyučovanie matematiky na základných školách*.

Literatúra

Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. In: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehlíková, N. (Eds.) *Proceedings 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 129–136). Praha: PME.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42(2), 371–406*.

Marchis, I. (2012). Preservice primary school teachers' elementary geometry knowledge. *Acta Didactica Napocensia, 5(2), 33–40*.

Martínez-Artero, R. N., & Checa, A. N. (2018). Knowledge of mathematics in future teachers when solving 6th-year primary school problems. *Educatio Siglo XXI, 36(3), 201–230*.

Pokorný, M., & Holý, D. (2018). O vstupných vedomostiach študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky z kombinatoriky a pravdepodobnosti. In: Uhlířová, M., & Wossala, J. (Eds.) *EME 2018 Proceedings, Perspektivy primárního vzdělávání matematice* (pp. 59–63). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

Scholtzová, I. (2003). *Inovačné trendy vo vyučovaní matematiky na 1. stupni ZŠ (rozvíjanie kombinatorického myslenia)*. Prešov: Metodicko-pedagogické centrum.

Štátny pedagogický ústav. (2014). Matematika – primárne vzdelávanie. Dostupné z http://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/ matematika_pv_2014.pdf.

Žilková, K. (2016). Axial symmetry in pre-primary and primary teachers education. In: Balko, Ľ., Szarková, D., & Richtáriková, D. (Eds.) *APLIMAT: 15th Conference on Applied Mathematics* (pp. 1164–1170). Bratislava: STU.

Žilková, K. (2014). Poznatky a predstavy o pravouholníkoch študentov učiteľstva pre primárne vzdelávanie. In: Uhlířová, M. (Ed.) *Matematika 6 : matematické vzdělávání v primární škole - tradice, inovace* (pp. 284–288). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.

ISSN 2694-8133

ZVÝŠENÍ ZÁJMU ŽÁKŮ O MATEMATIKU POMOCÍ ŘEŠENÍ NESTANDARDNÍCH ÚLOH ROZVÍJEJÍCÍCH MATEMATICKOU GRAMOTNOST

Hana HAVLÍNOVÁ[1], Eva ZELENDOVÁ[2]
[1] Národní ústav pro vzdělávání, Praha (ČR)
[2] Vysoká škola regionálního rozvoje a Bankovní institut – AMBIS, a.s., Praha (ČR)
hana.havlinova@nuv.cz, zelendova.e@gmail.com

Abstrakt

Při mezinárodním šetření PISA 2015 v rámci dotazníkového šetření velké procento českých žáků uvedlo, že nemají rádi matematiku. Také výsledky u státních maturitních zkoušek ukazují, že matematika je pro řadu žáků „strašák". Proč tomu tak je, když na 1. stupni základní školy jsou žáci v hodinách matematiky motivovaní a spatřují v matematických úlohách zábavné hledání a objevování? Proč se během vzdělávací dráhy u žáků ztrácí motivace a zájem o řešení nestandardních úloh, když právě tyto dovednosti jsou v běžném životě velmi důležité? Co na žáky negativně zapůsobilo, kde hledat příčiny velké neoblíbenosti matematiky a jak tento nežádoucí trend změnit? Akční výzkum, který autorky provedly na podzim 2018 na reprezentativním vzorku žáků a studentů od 1. stupně základní školy po školu vysokou, se zabýval hledáním odpovědí na položené otázky.

Pro sběr dat výše uvedeného pedagogického výzkumu byly použity tři metody: škálované otázky v dotazníku, kognitivní test a analýza písemných produktů žáků. Na škálované otázky, které se týkaly obliby matematiky na 1. a 2. stupni základní školy a na škole střední, odpovídali prostřednictvím dotazníku studenti 1. ročníku různých vysokých škol (mimo vysoké školy, které svým zaměřením využívají matematiku ve velké míře). Kognitivní test obsahoval dvě matematické úlohy, které byly převzaty z přijímacího řízení určeného pro žáky pátého ročníku (jednu úlohu lze označit za běžnou „školní" úlohu, druhou za úlohu nestandardní mapující úroveň matematické gramotnosti žáků). Tato část výzkumu proběhla na 1. a 2. stupni základní školy, na školách středních i školách vysokých.

Zpracované odpovědi na škálované otázky poskytnou informaci o tom, v jaké míře je pokles zájmu žáků o matematiku rozdělen mezi 1. a 2. stupeň základní školy a mezi školu střední. Rozbor strategií použitých k řešení dvou matematických úloh zadaných v kognitivním testu potvrdil hypotézu, že se zvyšujícím věkem a rozšiřujícím se matematickým aparátem žáků, ubývá kreativita žáků při volbě možných řešení dané nestandardní úlohy.

Výzkum, který autorky provedly na podzim 2018 na reprezentativním vzorku žáků a studentů od 1. stupně základní školy po školu vysokou, pomohl také formulovat jedno možné řešení výše uvedeného problému včetně návrhu, jak zavést tohoto řešení do pedagogické praxe.

Klíčová slova: akční výzkum, matematická gramotnost, primární vzdělávání, projekt Podpora práce učitelů

INCREASING PUPILS´ INTEREST IN MATHEMATICS BY SOLVING NON-STANDARD TASKS THAT DEVELOP MATHEMATICAL LITERACY

ISSN 2694-8133

Abstract

By the international questionnaire research PISA 2015 the big amount of czech students indicated, that they do not like Mathematics. Also many results of the Graduation show, that Mathematics is a „threat“ for many students. Why is it so, when in the primary schools, pupils are motivated to find fun and exploration in the mathematic tasks? Why in the course of education students lose their motivation and interest in the solving of non-standard tasks, which is so important skill in the common life. What has made such negative impact? Where should we find the reasons of this unpopularity and how to change it? The research, which the authors have made in autumn 2018 with the representative sample of students from the primary school to university, follow up these questions and try to find the answers.

For the above mentioned research three methods were used: questionnaire with the given range of answers, cognitive test and the analysis of students´ written works. The questions in the questionnaire with the given range of answers refered to the popularity of mathematics on the primary and secondary schools, answered students in the first year of different university studies (except for the studies which are focused in mathematic) The cognitive test had two mathematic tasks, taken from the admission tests, intended for the pupils of the fifth class. (The first one could be described as a regular school task and the other as non-standard task to show the level of pupils´ numeracy.) This part of the research took place from the primary schools to universities.

The processed answers for the questionnaire with the given range of answers will give the information about the amount of the decrease of interest in mathematics and in what stage of education is this decrease the most intensive. The analysis of the used strategy for the mathematics tasks given in the cognitive test confirmed, that as getting older and with extended mathematic knowledge, there is the lack of creativity of alternative ways of solving the non-standard task.

The research, which the authors have made in autumn 2018 with the representative sample of students from the primary school to university, helped to formulate one possible solution to the above mentioned problem, and the authors also suggest how to put this solution into the pedagogic practice.

Keywords: numeracy, primary education, research

1. Úvod

Při mezinárodním šetření PISA 2015 [ČŠI, 2016, s. 30] v rámci dotazníkového šetření velké procento českých žáků uvedlo, že se obávají matematiky. Také snižující se počet žáků, kteří si volí matematiku jako 2. povinnou státní maturitní zkoušku [Centrum pro zjišťování výsledků ve vzdělávání, 2019], ukazuje, že matematika je pro řadu žáků „strašák“. Autorky článku si položily následující otázky: „Je reálné vnímání matematiky žáky opravdu tak negativní, jako jsou prezentovaná zjištění? A pokud ano, proč tomu tak je, když na 1. stupni základní školy jsou žáci v hodinách matematiky motivovaní a spatřují v matematických úlohách zábavné hledání a objevování? Jaké jsou důvody ztráty motivace a zájmu o řešení nestandardních úloh, když právě tyto dovednosti jsou v běžném životě velmi důležité?“

2. Proměna obliby matematiky

Akční výzkum, který autorky článku provedly na podzim 2018 na reprezentativním vzorku žáků a studentů od 1. stupně základní školy po školu vysokou využil pro sběr dat následující tři metody:

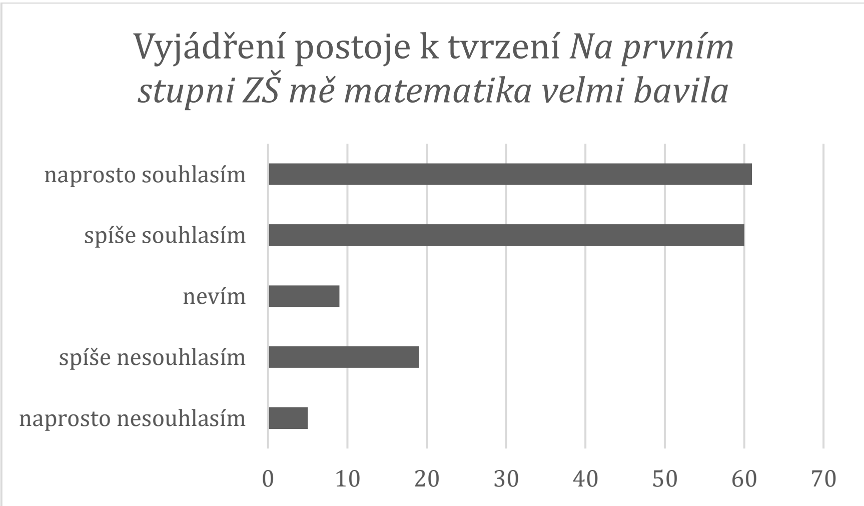
ISSN 2694-8133

- dotazníkové šetření pomocí škály souhlasu s daným tvrzením (proměna obliby matematiky)
- kognitivní test (řešení nestandardní úlohy)
- analýza písemných produktů žáků (rozbor strategií použitých k řešení dané úlohy)

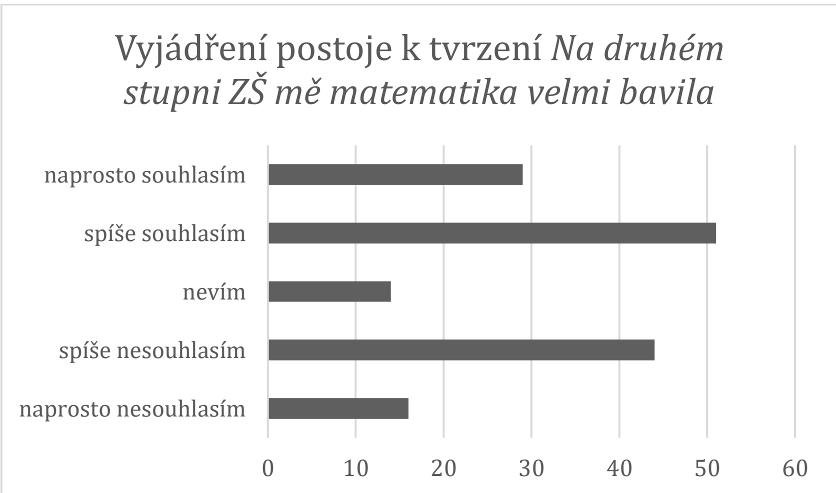
Dotazníkové šetření, kterého se zúčastnili studenti prvních ročníků různých vysokých škol (mimo vysoké školy, které svým zaměřením využívají matematiku ve velké míře), zjišťovalo míru souhlasu s předloženým tvrzením. Studenti měli na škále (neprosto souhlasím, spíše souhlasím, nevím, spíše nesouhlasím, naprosto nesouhlasím) vyznačit svůj postoj k následujícím tvrzením:

- Na prvním stupni mě matematika velmi bavila.
- Na druhém stupni mě matematika hodně bavila.
- Na střední škole mě matematika hodně bavila.

Následující tři grafy zachycují počty studentů (ze 154 respondentů), kteří zaujali kladný postoj u jednoho z uvedených tvrzení. Graf 1 ukazuje, že na prvním stupni matematika většinu žáků baví. „Přelévání" obliby matematiky k neoblíbenosti tohoto předmětu na 2. stupni základní školy potvrzuje Graf 2.

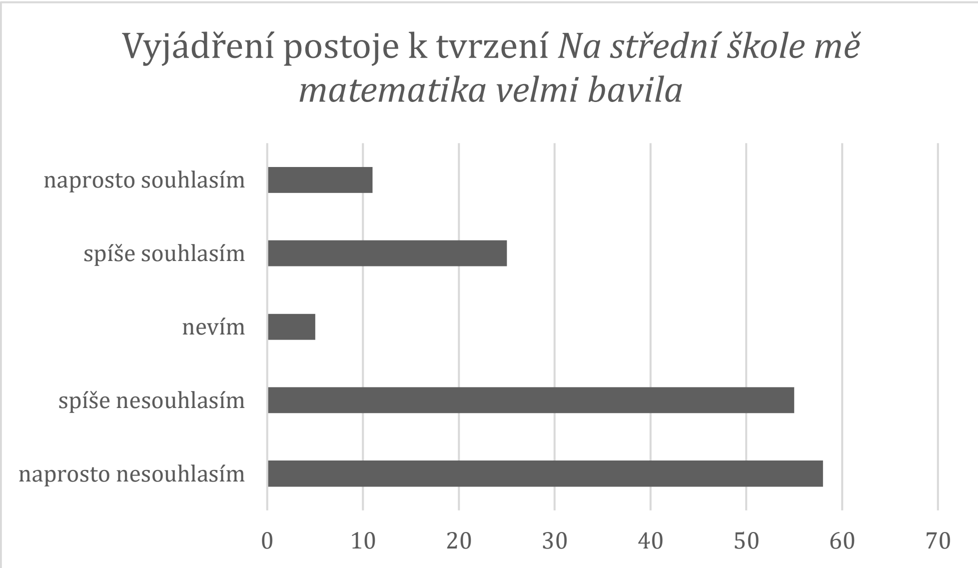


Graf 1. Vyjádření postoje k tvrzení Na prvním stupni ZŠ mě matematika velmi bavila

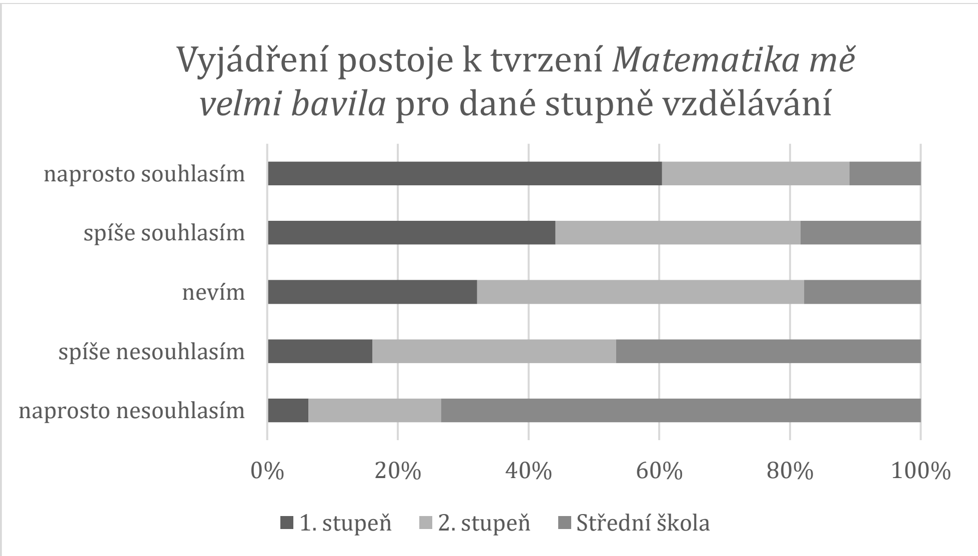


Graf 2. Vyjádření postoje k tvrzení Na druhém stupni ZŠ mě matematika velmi bavila

Vzhledem k tomu, že dotazník byl zadán studentům na vysokých školách, kde při přijímacím řízení nekladl důraz na matematické znalosti a dovednosti, nepřekvapí výsledek zachycený v Grafu 3. Sumarizace zjištěné obliby matematiky na základní a střední škole je zachycena v Grafu 4.



Graf 3. Vyjádření postoje k tvrzení Na střední škole mě matematika velmi bavila



Graf 4. Sumarizace zjištěné obliby matematiky na základní a střední škole

3. Zadání kognitivního testu

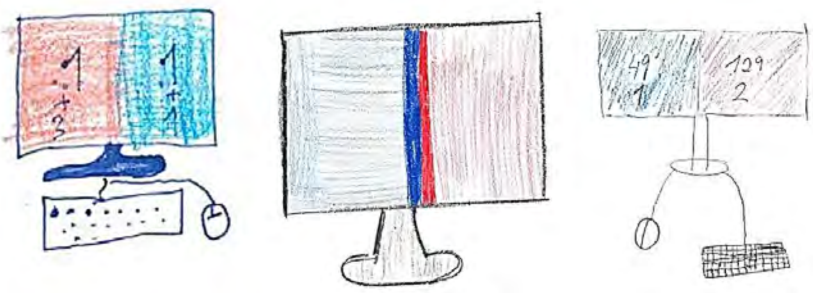
Kognitivní test (který byl zadán 183 žákům na prvním a druhém stupni základní školy a 154 studentům v 1. ročníku školy vysoké) obsahoval mimo jiné i nestandardní úlohu převzatou z přijímacího řízení [Centrum pro zjišťování výsledků ve vzdělávání, 2018] pro žáky pátého ročníku následujícího zadání:

Na obrazovce počítače jsou dvě čísla – jedno v modrém a druhé v červeném poli.
Na počátku jsou obě čísla stejná.
Při každém pípnutí se obě čísla zvětší – v modrém poli o 1 a v červeném o 3.
V jednu chvíli se na obrazovce objeví v modrém poli číslo 49 a současně v červeném poli číslo 129.
1) Určete, jaké číslo je v modrém poli na počátku.
2) Určete číslo v modrém poli v okamžiku, kdy je o 30 menší než číslo v červeném poli.
3) Určete číslo v červeném poli v okamžiku, kdy je součet čísel v obou polích 2 018.

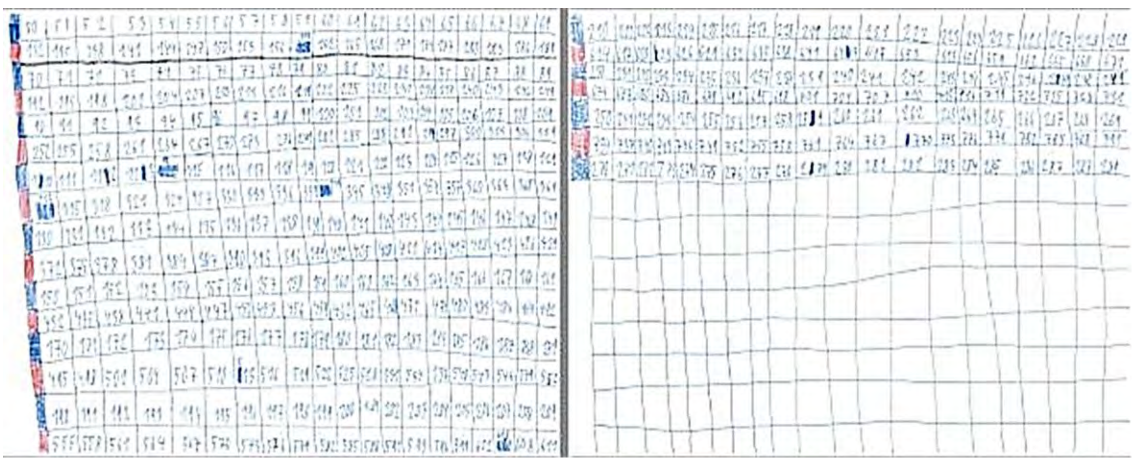
Tato nestandardní úloha velmi dobře ukazuje, na jaké úrovni je žák nebo student schopen zobecňovat dříve získané zkušenosti, objevit zákonitosti, případně účinně pracovat s chybou při minimálních matematických znalostech. Protože uvedené dovednosti korespondují s vymezením matematické gramotnosti [Havlínová, H., Zelendová, E. & kol., 2018], bude následující kapitola podrobněji pojednávat o použitých strategiích při řešení výše uvedené nestandardní úlohy. Důraz bude kladem na řešení žáků základní školy.

4. Rozbor strategií použitých k řešení nestandardní matematické úlohy

Rozbor strategií použitých k řešení nestandardní matematické úlohy jasně prokázal, že neexistují výrazné rozdíly v použitých strategiích mezi žáky 5., 6. a 7. ročníku. U nejmladších žáků byla vysledována primární snaha „dobrat se řešení“. Žáci se často po prvním neúspěchu nevzdávali a pokoušeli se opakovaně najít správnou odpověď. Především žáci 5. ročníku zahajovali řešení úlohy kresbou barevného monitoru (obrázek 1). Častou strategií, kterou žáci zvolili, bylo postupné přiřazování dvojic čísel, ačkoliv bylo velmi zdlouhavé a vyžadovalo značnou dávku trpělivosti (obrázek 2, 3, 4).

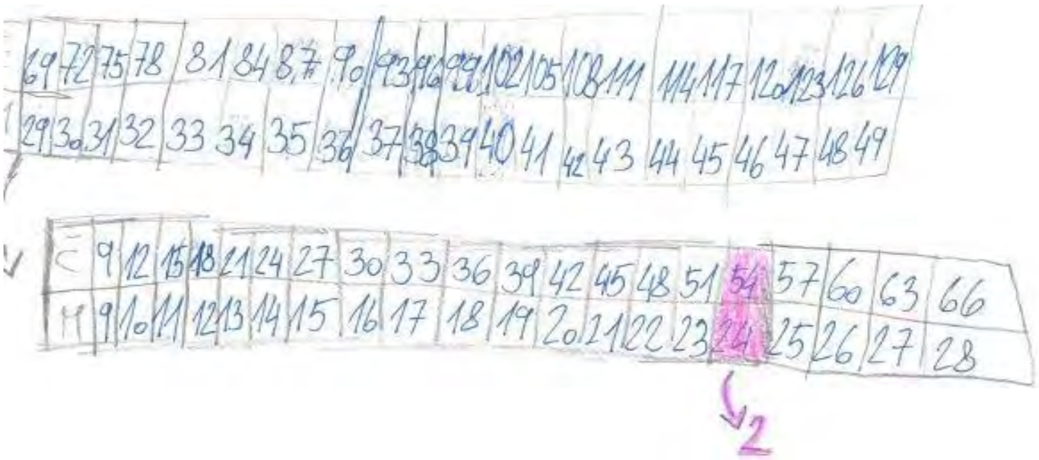


Obrázek 1. Kresba monitoru jako pokus o zahájení řešení úlohy

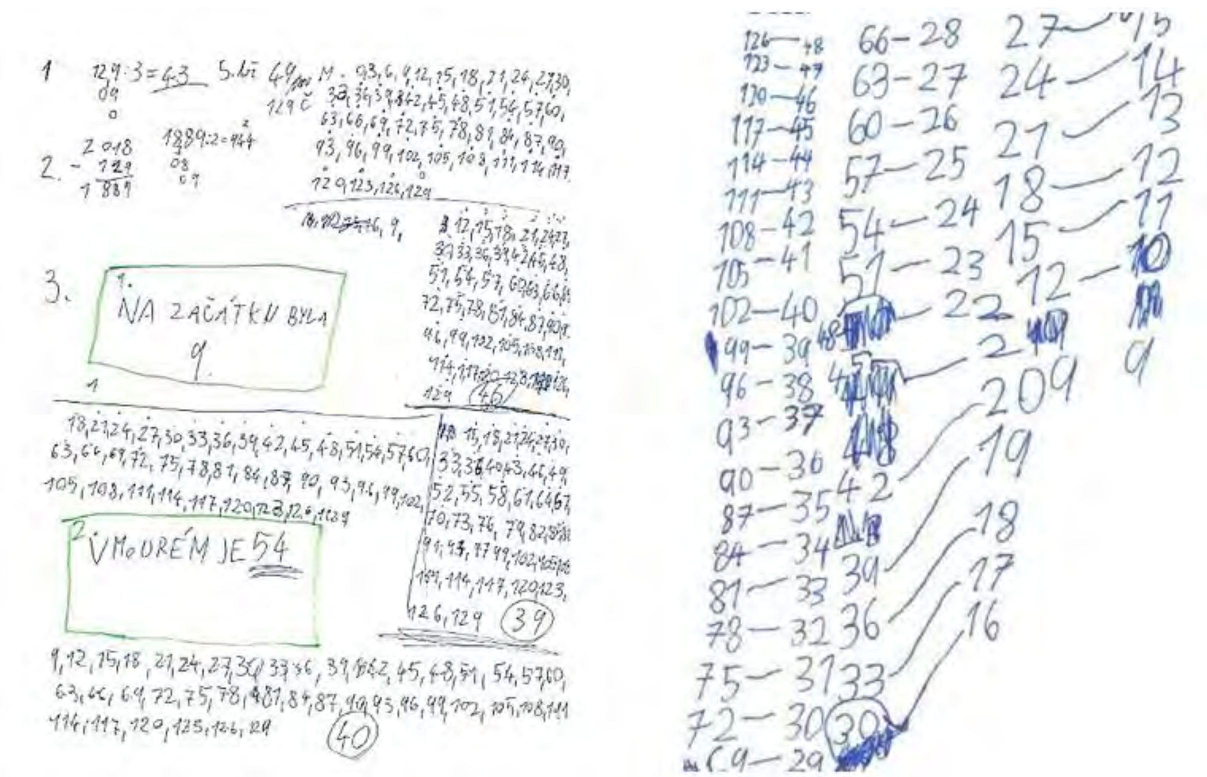


Obrázek 2. Trpělivé a pečlivé řešení

ISSN 2694-8133



Obrázek 3. Postupné přiřazování do tabulky

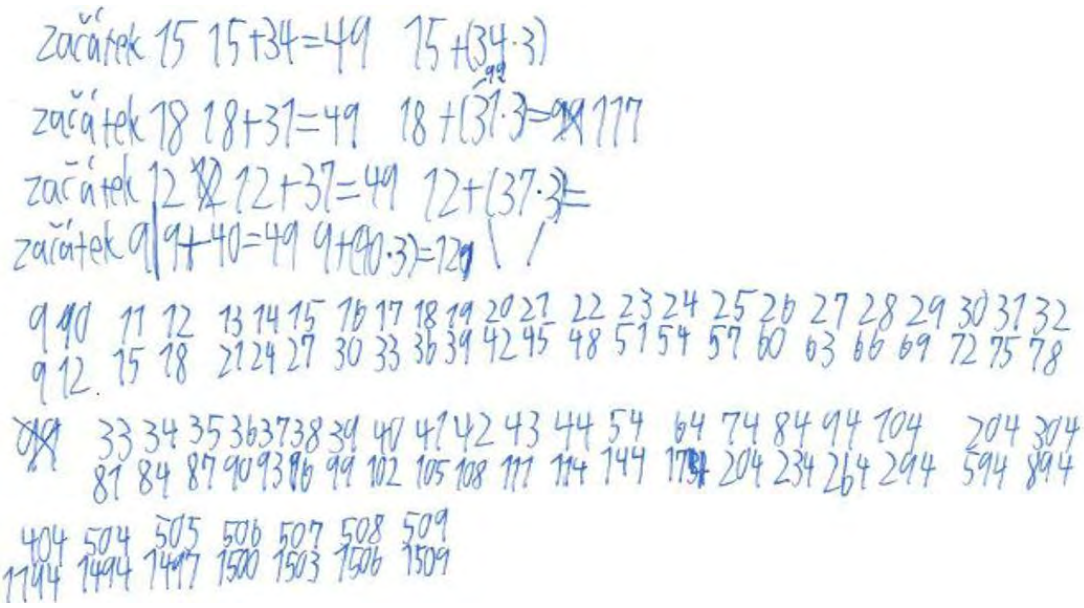


Obrázek 4. Postupné přiřazování – neuspořádané

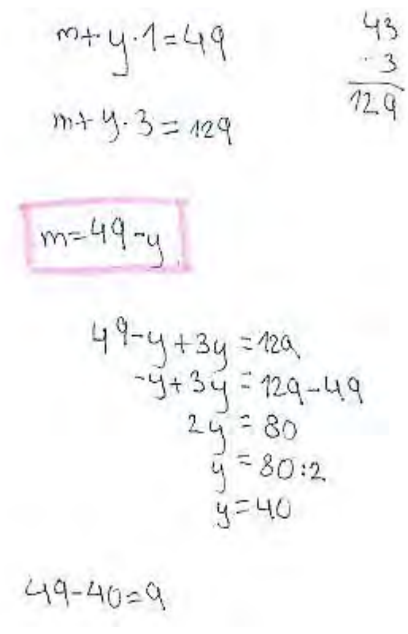
Obrázek 5 ukazuje stejnou strategii postupného přiřazování dvou čísel, kdy v horní řadě postupuje po jedné až k číslu 44, dále postupuje po desítkách a od čísla 104 po stovkách. Je dobře znatelné, že žák dokázal na základě zkušenosti najít pravidlo, podle kterého se dvojice čísel zvětšuje a tím mohl v mnohem kratším čase nejít řešení.

Obrázek 6 ukazuje řešení pomocí rovnic, které je nad rámec požadovaných znalostí žáků 7. ročníku.

ISSN 2694-8133



Obrázek 5. Postupné přiřazování se zobecněním



Obrázek 6. Řešení pomocí soustavy rovnic pro dvě neznámé (žák 5. ročníku)

Uváděné příklady zobrazují strategie, které volili žáci 5., 6. a 7. ročníků. Již v tomto období bylo možné pozorovat snižující se snahu nalézt řešení. Žáci 7. ročníku mnohem častěji úlohu vůbec nezačali řešit. U studentů vysokých škol byl tento jev pozorován ještě častěji. Namísto snahy o nalezení odpovědi libovolným způsobem, komentovali úlohu: „Řešení tohoto typu úlohy jsem již zapomněl.“

Rozbor strategií použitých k řešení nestandardní matematické úlohy zadaných v kognitivním testu potvrdil hypotézu, že se zvyšujícím věkem a rozšiřujícím se matematickým aparátem žáků ubývá kreativita žáků při volbě možných řešení dané nestandardní úlohy.

5. Závěr

Výše uvedený výzkum pomohl potvrdit význam specifického typu úloh, který podporuje rozvíjení matematické gramotnosti u žáků nejen na základní škole. Tyto úlohy, by měly:

- být pestré a výběrem námětů zajímavé pro danou věkovou skupinu
- být motivující a povzbuzující k řešení
- směřovat k různým žákovským postupům
- dávat žákům dostatečný časový prostor pro vlastní bádání, nesvazovat je

Pro žáka a učitele by měla být důležitá cesta ke správnému výsledku. O této cestě přináší informace žákovské řešení, které by měl učitel se žáky rozebírat, posuzovat a hodnotit. Tyto úlohy by měly být ve větší míře zaváděny do pedagogické praxe, např. prostřednictvím projektu Podpora práce učitelů, který podporuje pedagogy mateřských a základních škol v jejich snaze rozvíjet čtenářskou, matematickou a digitální gramotnost dětí a žáků (www.gramotnosti.pro). Jeho realizaci zajišťuje Národní ústav pro vzdělávání.

Literatura

Centrum pro zjišťování výsledků ve vzdělávání. (2019). *Maturitní zkouška 2013 – 2019- jarní zkušební období. Signální výsledky didaktických testů.* Praha: CERMAT. Dostupné z: https://dokumenty.cermat.cz/Sdilene%20dokumenty/MATURITA/MATURITA%202019/Analýzy/MZ13-19_DIDAKTICKE_TESTY_signalni_vysledky_na_web_24_5_2019.pdf.

Centrum pro zjišťování výsledků ve vzdělávání. (2018). *Zadání didaktického testu – osmiletá gymnázia – matematika.* Praha: CERMAT. Dostupné z: https://dokumenty.cermat.cz/Sdilene%20dokumenty/PŘIJÍMACÍ%20ŘÍZENÍ/Jednotná%20zkouška%202018/testy%202018/MA_2018_5_A.pdf.

ČŠI. (2016). *Rozdíly mezi školami v matematické gramotnosti. Sekundární analýzy výsledků mezinárodního šetření PISA*. Praha: ČŠI. Dostupné z: http://www.csicr.cz/html/Sekundarni_analyzyPISA_matika/html5/index.html?&locale=CSY&pn=23.

Havlínová, H., Zelendová, E. & kol. (2018). *Matematická gramotnost v uzlových bodech vzdělávání*. Praha: NÚV. Dostupné z: https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=82176&view=13192.

Janík, T., & kol. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky.* Brno: Masarykova univerzita.

ISSN 2694-8133

MATEMATICKÁ PREGRAMOTNOSŤ V PREDPRIMÁRNEJ EDUKÁCII NA SLOVENSKU A V NEMECKU (BRANDENBURSKO, BERLÍN)

Marek MOKRIŠ, Jana HNATOVÁ
Prešovská Univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
marek.mokris@unipo.sk, jana.hnatova@unipo.sk

Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme analýzou a komparáciou obsahu matematickej prípravy na predprimárnom stupni vzdelávania na Slovensku a v spolkovej republike Nemecko (spolková krajina Brandenbursko, spolková krajina Berlín). Pomocou komparatívnej analýzy zamýšľaného kurikula, prezentovaného v relevantných dokumentoch, podávame teoretickú interpretáciu zámerov pri práci s deťmi predškolského veku. Zameriavame sa na matematickú pregramotnosť v oblastiach predstáv o kvantite, geometrických predstáv a množinových predstáv.

Kľúčové slová: zamýšľané kurikulum, matematická pregramotnosť, predprimárne vzdelávanie

MATHEMATIC EARLY LITERACY IN PRE-PRIMARY EDUCATION IN SLOVAKIA AND GERMANY (BRANDENBURG, BERLIN)

Abstract

The paper deals with the analysis and comparison of the content of pre-primary mathematical education in Slovakia and the Federal Republic of Germany (Land of Brandenburg, Land of Berlin). The authors use a comparative analysis of the intended curriculum and interpret the intentions of working with preschool children. They focus on early mathematical literacy in the areas of quantity, geometric ideas and set ideas.

Keywords: Intended Curriculum, Mathematical Early Literacy, Pre-primary Education.

1. Úvod

Komparácia vzdelávania v medzinárodnom kontexte poskytuje zdroje informácií, ktoré môžu prispieť ku skvalitneniu vzdelávacieho procesu. Podľa Průchu (1997, s. 256), ak analyzujme kurikulárne projekty fungujúce v rôznych krajinách, zistíme, že ich základnou a spoločnou funkciou je regulovať edukáciu v dvoch dimenziách:

- dimenzia času edukácie, t. j. určenie toho, ako dlho a v akom období života sa musí subjekt vzdelávať,
- dimenzia obsahu edukácie, t. j. určenie toho, čomu sa musí subjekt vzdelávania učiť v prostredí školy.

V tejto štúdii sa primárne zameriavame na identifikáciu, analýzu a komparáciu dimenzie obsahu edukácie. Atribúty dimenzie času edukácie v školskom systéme predstavujú sekundárny faktor. Komparácia teritoriálne pokrýva Slovensko a krajiny Brandebursko a Berlín v Spolkovej republike Nemecko.

Dôvodom skúmania problematiky je identifikácia faktorov ovplyvňujúcich matematickú pregramotnosť detí predškolského veku. Matematickú pregramotnosť vnímame ako súbor predmatematických predstáv detí predškolského veku v kontexte, ktorý je teoretický popísaný v dokumente Teoretické vymezení témat modulu Matematická pregramotnost. Medzi základné predmatematické predstavy je možné zaradiť tri základné oblasti: predstavy o kvantite, geometrické predstavy a množinové predstavy (triedenie, usporiadanie, riešenie problémov).

Metodika výskumu je založená na použití komparatívnej analýzy zamýšľaného kurikula s cieľom poskytnutia teoretického výkladu a interpretácie relevantných dokumentov ovplyvňujúcich edukačný proces.

Štúdia je parciálnym výstupom vedeckovýskumného projektu VEGA 1/0844/17 Identifikácia kľúčových obsahových aspektov matematickej edukácie v predprimárnom vzdelávaní v medzinárodnom a historickom kontexte a jej cieľom je prezentácia výsledkov hľadania odpovedí na výskumnú otázku: *Sú v kurikulárnych dokumentoch v Spolkovej republike Nemecko uvedené obsah a ciele matematickej edukácie v preprimárnom vzdelávaní? Ak áno, ako sú spracované*? Čiastkovým cieľom je analyzovať kurikulárne dokumenty po formálnej stránke a z pohľadu obsahu a cieľov matematickej edukácie.

2. Zamýšľané kurikulum z matematiky v predprimárnom vzdelávaní v Nemeckej spolkovej republike

Predškolská výchova nie je v Nemeckej spolkovej republike povinná. Pre deti vo veku do troch rokov je starostlivosť zabezpečená v detských jasliach (Krippen). Tri až šesť-ročné deti môžu navštevovať predškolské zariadenia, ktoré nie sú jednotného typu, napríklad sú to materské školy (Kindergarten), kde sa zabezpečuje aj príprava na vstup do základnej školy. V niektorých spolkových krajinách existujú aj iné formy prechodu z predškolského zariadenia (Kindergarten) alebo zo zariadení dennej starostlivosti pre deti (Kindertagesstätte, Kindertagespflege) do základnej školy (Vorklassen – predškolské triedy, Schulkindergärten – materské školy pre žiakov). Dokument, ktorý upravuje spoločné rámce pre vzdelávanie v predškolských zariadeniach (Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen), definuje tieto vzdelávacie oblasti:

- Jazyk, písanie, komunikácia,
- Osobnostný a sociálny rozvoj, etická výchova / náboženská výchova,
- Matematika, Prírodné vedy, Informačné technológie,
- Hudobné vzdelanie, práca s médiami,
- Telo, pohyb, zdravie,
- Príroda a kultúrne prostredie.

Vzdelávacie oblasti obsahujú elementy vzdelávania, ktoré sú charakterizované v širšom kontexte. Z pohľadu matematickej edukácie, ktorá je súčasťou obsahovej oblasti Matematika, prírodné vedy, informačné technológie, ide o využitie prirodzenej detskej zvedavosti na skúmanie čísel, množstva (počtu objektov v skupine), geometrických útvarov a rozvoj matematických predstáv a zručností.

Väčšina spolkových kurikulárnych dokumentov pre predškolský vek je založená na pohľade na deti ako na činiteľov vlastného učenia sa v procese konštruktívnej spolupráce s dospelými a inými deťmi. Hlavné rozdiely v kurikulárnych dokumentoch sú vo vekovej skupine, pre ktorú sú určené a či sú alebo nie sú povinné. Zatiaľ čo väčšina spolkových krajín ich považuje za „usmernenia", v Bavorsku, Berlíne, Sasku a Thüringene sú predškolské zariadenia zo zákona povinné zahrnúť tieto hlavné princípy a ciele do oblasti vzdelávania. (Schreyer & Oberhumer, 2017, s. 7).

2.1. Zamýšľané kurikulum z matematiky v predprimárnom vzdelávaní v spolkovej krajine Brandebursko

Analýza kurikula v predškolských zariadeniach v spolkovej krajine Branderbusrko vychádza z dokumentu *Grundsätze elementarer Bildung in Einrichtungender Kindertagesbetreuung im Land Brandenburg* (Zásady predprimárneho vzdelávania v zariadeniach dennej starostlivosti v štáte Brandenbursko). Dokument prezentuje dôležitosť podpory základných vzdelávacích procesov s cieľom zabezpečiť rozvojový potenciál každého dieťaťa, rovnosť príležitostí a budúcnosť spoločnosti s cieľom poskytnúť deťom v zariadeniach dennej starostlivosti v štáte Brandenbursko rôznorodé možnosti vzdelávania rešpektujúc potreby a záujmy dieťa.

Vzdelávací proces v predškolských zariadeniach nie je štruktúrovaný do predmetov v školskom zmysle, ale obsahuje členenie do vzdelávacích oblastí, ktoré dávajú pedagogickému konceptu ucelený rámec. To umožňuje definovať princípy vzdelávania. V zariadeniach starostlivosti o deti v štáte Brandenbursko majú deti možnosť sa vzdelávať v každej z nasledujúcich oblastí:

- Telo, pohyb a zdravie,
- Jazyk, komunikácia a písomná kultúra,
- Hudba,
- Výtvarne umenie a dizajn,
- Matematika a prírodoveda,
- Spoločenský život.

Každá z týchto vzdelávacích oblastí je z pohľadu hierarchie rovnocenná. Východiskovým bodom pre popis vzdelávacích oblastí sú schopnosti dieťaťa. Prezentujú sa vzdelávacie zručnosti u dievčat a chlapcov, ich zmeny a rozdiely v závislosti od veku a úrovne vývoja. Vzdelávanie v matematickej oblasti je založené na týchto elementoch:

- Orientácia v priestore – deti vnímajú okolité prostredie ako trojrozmerný priestor, vnímajú objekty a ich pozičný vzťah,
- Propedeutika zlomku – deti skúmajú vzťah medzi časťou a celkom,
- Prirodzené číslo – deti pracujú so skupinami objektov s cieľom určiť počet,
- Geometrický útvar – deti experimentujú s rovinnými a priestorovými útvarmi,
- Miera – deti sa zaoberajú problematikou merania,
- Vzory a tvary – deti navrhujú a vytvárajú vzory a ornamenty,
- Propedeutika osovej súmernosti – deti pracujú so zrkadlom a zrkadlovými obrazmi.

Za účelom získania matematických a prírodovedných kompetencií je v kurikulárnom dokumente odporúčané používať nasledujúce pomôcky:

- plány (napr. Metro), prehľadné mapy, diagramy, tabuľky, mapy, mapy miest,
- hodiny, kalendáre, cestovné poriadky,
- modely peňazí,
- meter na meranie výšky tela, mechanické váhy, odmerky,
- počítače a zodpovedajúce počítačové hry,
- stavebnice obsahujúce dieliky rôznych tvarov, farieb a veľkosti,
- budík, rádio, baterka, lupa, zrkadlo, zväčšovacie sklo, fotoaparát.

ISSN 2694-8133

Dokument obsahuje námety ako stimulovať a podporovať vzdelávacie procesy u detí prostredníctvom pedagóga. Nakoniec sú prezentované príklady realizácie činnosti, ktoré špecificky podporujú vzdelávaciu schopnosť detí v príslušných vzdelávacích oblastiach.

Je možné konštatovať, že vzdelávacia oblasť Matematika a prírodoveda vychádza z Piagetových myšlienok, kde znalosti dieťaťa o objektoch závisia úplne od ich prítomnosti. V druhom roku života dieťa na základe primeraných skúseností vie, že objekty stále existujú, aj keď zmizli z jeho zorného poľa. Napríklad, keď sa lopta hodí pod skrinku, dieťa sa už viac nedomnieva, že lopta je navždy stratená, ale vie, že ju môže nájsť.

V činnostiach spojených s matematikou sa deti venujú napríklad triedeniu stavebnicových dielikov podľa farby, tvaru alebo veľkosti, ich umiestnením do radu a počítaním. V nadväznosti na to sa buduje predstava o počte, ktorá však najprv môže byť aj chybná. Dieťa sa potom dozvie, že séria číselných mien môže byť prenesená do série objektov. Ukázaním na jednu položku a vyslovením jej prvého mena a opakovaním tohto procesu s nasledujúcim číslom slova môže určiť počet položiek. Prvá položka sa nazýva "jedna", druhá "dve" a tak ďalej. Štyri alebo päťročné dieťa si uvedomí, že posledné číslo v tomto slovnom číslovaní určuje zároveň počet objektov v rade. Pre pochopenie čísel a množstiev je odporúčané využívať myšlienky a materiály vychádzajúce z Montessori pedagogiky.

Každé dieťa je pravidelne a diferencovane pozorované s cieľom zistiť, aké sú jeho silné a slabé oblasti. Pozorovania poskytujú východiská pre realizáciu podporných aktivít v spolupráci s rodičmi.

2.2. Zamýšľané kurikulum z matematiky v predprimárnom vzdelávaní v spolkovej krajine Berlín

Pri analýze zamýšľaného kurikula pre deti predškolského veku vychádzame z dokumentu *Berliner Bildungsprogramm für Kitas und Kindertagespflege* (Berlínsky vzdelávací program pre centrá dennej starostlivosti), ktorý predstavuje záväzný rámec pre prácu pedagógov v predškolských zariadeniach. Popisuje základné vedomosti, zručnosti a schopnosti, ktoré dieťa potrebuje na to, aby uspelo v živote. Prezentuje vzdelávací obsah, ktorým sa tento cieľ má dosiahnuť a aké prostriedky použiť na rozvoj dieťaťa v závislosti od úrovne jeho schopností a záujmov.

Cieľom vzdelávacieho programu je, aby všetky deti získali čo najlepšie podmienky na ďalšie vzdelávanie. Centrum dennej starostlivosti je predškolským zariadením, ktoré dopĺňa a podporuje vzdelávanie, výchovu a starostlivosť o deti, ktorá je realizovaná v rodine. Od 1. augusta 2018 je starostlivosť o deti predškolského veku bezplatná, rodičia sú povinní uhradiť len stravný poplatok. (https://www.berlin.de/sen/bildung/schule/bildungswege/fruehkindliche-bildung/)

Vzdelávací program v Berlíne rozlišuje šesť vzdelávacích oblastí:

- Zdravie,
- Sociálny a kultúrny život,
- Komunikácia: jazyky, písomná kultúra a médiá,
- Umenie: výtvarné umenie, hudba, divadlo,
- Matematika,
- Príroda – Životné prostredie – Technika.

Vzdelávacia oblasť Matematika integruje šesť základných pilierov predškolského matematického vzdelávacieho procesu:

ISSN 2694-8133

- *Triedenie a kategorizovanie*, kde je cieľom získať skúsenosti s používaním vecí každodennej potreby a ich vlastnosťami – ako tvar, veľkosť a hmotnosť, ktoré deti vedia popísať a kategorizovať.
- *Vzory a symetrie* poskytuje priestor ako objaviť a samostatne vytvoriť spoločné vlastnosti a pravidelnosti; vnímať vzor ako opakujúce sa usporiadanie, poznať symetrie ako jazyk prírody.
- *Čísla a číselné množiny* predstavujú pilier, ktorého cieľom je porozumieť vzťahom medzi číslami a objektami, priblížiť význam čísel, získať predstavu o čísle pri usporiadaní, pri počítaní (ako kardinálne a ordinálne číslo) a poznať podstavu matematických počtových operácii (sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie).
- *Priestor a geometria* má za cieľ získať predstavu o priestore, o geometrii a neskôr poznať abstraktné rovinné a priestorové útvary.
- *Meranie a porovnávanie* je oblasťou, ktorá sa sústreďuje na meranie a porovnávanie dĺžky, hmotnosti, vzdialenosti a času.
- *Grafická prezentácia a štatistika* je zameraná na využívanie vizuálnej podpory pomocou tabuliek, diagramov a schém pri porovnávaní čísel a množstiev.

Vo vzdelávacej oblasti Matematika sú prezentované aj možnosti na jej integráciu do ostatných vzdelávacích oblastí v tomto kontexte:

- *Zdravie*: vnímať vlastné telo so všetkými jeho vlastnosťami, ako je výška, hmotnosť, dĺžka vlasov a porovnať tieto vlastnosti s inými deťmi.
- *Sociálny a kultúrny život*: poznať rôzne časové údaje, miery, znázornenia číslic.
- *Komunikácia*: popísať pozorovanie počasia, vytváranie obrazov a symbolov pre rôzne javy.
- *Umenie*: prezentovať modely abstraktných geometrických útvarov ako kruh, štvorec a obdĺžnik, pohybové hry, piesne a detské tance, ktoré majú súvislosť s počítaním a usporiadaním
- *Príroda, životné prostredie, technika*: porovnávať veľkosť, počet a tvar objektov, ktoré predstavujú napr. nohy hmyzu a pavúkov.

Ostatná časť v oblasti Matematika je zameraná na prezentáciu kompetencií, ktorými má dieťa na konci predškolského veku disponovať. Tie sú kategorizované nasledovne:

- Kompetencie súvisiace s uvedomením si seba samého:
  - Určiť počet očí, uší, nôh, rúk, prstov, zubov, hláv a nosov.
  - Poznať svoj vek.
  - Rozvíjať predstavy o čase: ráno, na obed, večer, v noci, pred a po jedle, pred a po spánku, ...
- Sociálne kompetencie:
  - Používať matematické poznatky v sociálnych situáciách, napr. pri rozdeľovaní a výmene.
  - Vysvetliť riešenie problému a akceptovať, že iné deti používajú iné spôsoby na riešenie problémov.
  - Vedieť oznámiť, koľko častí z konkrétnej veci môže mať alebo dať.
- Prírodovedné kompetencie:
  - Porozumieť usporiadaným štruktúram v súvislosti s časom: pred – po, včera – dnes – zajtra, hodina – deň – mesiac – rok.
  - Vnímať rôzne javy a porovnať ich na základe veľkosti a množstva: menší ako, väčší ako, rovnako veľký ako, ...

ISSN 2694-8133

- Propedeutika predstavy o rovnakom počte (dve nohy, dve stoličky, ...) a ich grafická prezentácia.
- Propedeutika predstavy o zachovaní množstva (1 liter vo vysokej nádobe a širokej nádobe).
- Pochopiť podobnosť a rozdielnosť vecí na základe rôznych charakteristík (napr. tvar, veľkosť, farba).
- Poznať vlastné číslo domu a poštové smerovacie číslo.
- Orientovať sa v malom číselnom obore.
- Poznať niektoré geometrické útvary (kruh, štvoruholník, trojuholník, obdĺžnik, štvorec)
- Priradiť číslo v súvislosti s identifikáciou, počítaním a meraním (Koľko? Koľký v poradí? Koľko krát? Aký veľký? Ako dlho? Ako vysoko?). Poznať čísla ako ordinálne a kardinálne.
- Poznať základné vedomosti o geometrických útvaroch.
- Porozumieť používaniu peňazí v reálnom živote.
- Ovládať základné zručnosti pri používaní počítača.

3. Zamýšľané kurikulum z matematiky v predprimárnom vzdelávaní na Slovensku

Príprava detí predškolského veku na Slovensku sa realizuje v materských školách a prebieha v súlade so vzdelávacími programami. Vzdelávacie programy sú dokumenty, ktoré sú dvojstupňové (štátny vzdelávací program, školský vzdelávací program). Štátne vzdelávacie programy vymedzujú povinný obsah výchovy a vzdelávania v školách. Vydáva ich Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR (https://www.minedu.sk/) a na prvej, štátom predpísanej a povinnej úrovni sú on-line dostupné na portáli Štátneho pedagogického ústavu (http://www.statpedu.sk/sk/svp/statny-vzdelavaci-program/). Štátny vzdelávací program je záväzný dokument, ktorý je podkladovým materiálom pre tvorbu školského vzdelávacieho programu. Ten vydáva každá škola a podľa neho sa uskutočňuje výchova a vzdelávanie, ktoré zohľadňuje regionálne potreby a špecifické podmienky školy.

Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách (2016, s. 5) ustanovuje základné požiadavky štátu na poskytovanie inštitucionálneho predprimárneho vzdelávania v materských školách. Štát prostredníctvom neho garantuje kvalitu inštitucionálneho predprimárneho vzdelávania vo všetkých materských školách zaradených v sieti škôl a školských zariadení Slovenskej republiky.

Obsah vzdelávania v materskej škole sa vymedzuje v nasledujúcich vzdelávacích oblastiach:

- Jazyk a komunikácia,
- Matematika a práca s informáciami,
- Človek a príroda,
- Človek a spoločnosť,
- Človek a svet práce,
- Umenie a kultúra,
- Zdravie a pohyb.

Elementy matematiky sú súčasťou vzdelávacej oblasti Matematika a práca s informáciami, ktorej hlavným cieľom je poskytnúť základy matematických a informatických poznatkov a zručností, pomocou ktorých sa ďalej rozvíja matematické myslenie a matematické kompetencie nevyhnutné pre vzdelávanie na vyšších stupňoch vzdelávania. Prostredníctvom jej obsahu sa začína rozvíjať logické myslenie dieťaťa, chápanie čísel a jednoduchých operácií s nimi, ako aj algoritmické myslenie. V rámci rozvoja geometrických predstáv sa požiadavky na výkon detí sústreďujú na orientáciu v priestore, poznávanie geometrických útvarov a na zoznamovanie sa s problematikou merania dĺžky. (Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách, 2016, s. 12)

Vzdelávací štandard pre matematickú pregramotnosť je koncipovaný vo vzdelávacej oblasti Matematika a práca s informáciami. Tá je štruktúrovaná do štyroch podoblastí: Čísla a vzťahy, Geometria a meranie, Logika a Práca s informáciami. Problematike matematickej pregramotnosti sú venované prvé tri podoblasti.

Podoblasť *Čísla a vzťahy* sa týka predovšetkým zisťovania počtu predmetov v skupine a riešenia jednoduchých úloh súvisiacich s počtom. Podoblasť *Geometria a meranie* sa zameriava na orientáciu v priestore a rovine, deti sa v nej zoznamujú s najjednoduchšími geometrickými útvarmi a ich porovnávaním a meraním. Podoblasť *Logika* je malým úvodom do logiky. Deti sa stretávajú s pravdivými a nepravdivými tvrdeniami, s jednoduchými postupnosťami a riešia jednoduché úlohy na vytváranie skupín a triedenie. (Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách, 2016, s. 13).

4. Komparatívna analýza zamýšľaného kurikula z matematiky v predprimárnom vzdelávaní v Nemeckej spolkovej republike a na Slovensku

Komparatívnu analýzu realizujeme v troch obsahových oblastiach: oblasť predstáv o kvantite, oblasť geometrických predstáv a oblasť množinových predstáv.

V oblasti ***predstáv o kvantite*** medzi spoločné atribúty je možné zaradiť budovanie predstáv o prirodzenom čísle, založených na vnímaní čísla ako kardinálneho aj ordinálneho. Deti v tomto veku pracujú so skupinami objektov s cieľom určiť ich počet. V slovenskom kontexte je definovaný aj číselný obor (do 10), ktorý nemecké kurikulum bližšie nešpecifikuje. V Brandenbursku deti skúmajú aj vzťah medzi časťou a celkom, pričom tieto činnosti je možné vnímať ako propedeutiku zlomku. V spolkovej krajine Berlín majú predškoláci poznať podstavu matematických počtových operácií (sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie). Binárnu reláciu porovnávanie sme identifikovali vo všetkých analyzovaných kurikulárnych dokumentoch, napríklad v kontexte aplikácie vzťahov viac ako/menej ako/rovnako. Meranie je ďalším spoločným atribútom v príprave detí predškolského veku v komparovaných krajinách, pričom pracujú s mierami dĺžky, času a peňažných hodnôt. Kurikulárny dokument v spolkovej krajine Brandenbursko ešte obsahuje aj prácu s určovaním hmotnosti a aktivity s odmerkami na určovanie objemu. V spolkovej krajine Berlín je problematika objemu prezentovaná v intenciách budovania predstavy o zachovaní množstva (1 liter v nádobách rôzneho tvaru).

V oblasti ***geometrické predstavy*** je vzdelávanie založené na spoločných princípoch získavania skúsenosti s rôznymi priestorovými pozíciami vo vzťahu vlastnej osoby k objektom v okolitom prostredí. V kurikulárnych dokumentoch je možné identifikovať rôznu úroveň konkretizácie. Kým v slovenskom dokumente je uvedená aj presná špecifikácia slov a slovných spojení v súvislosti s orientáciou v priestore a rovine (hore, dole, vpredu, vzadu, nad, pod, pred, za, medzi, na (čom, kom), v (čom, kom), vpravo, vľavo, v rohu, v strede), naproti tomu v spolkových krajinách Brandenburg a Berlín je cieľová požiadavka uvedená v širšom kontexte (vnímať objekty a ich pozičný vzťah, resp. získať predstavu o priestore). Z geometrických útvarov sú deťom predškolského veku sprístupňované rovinné aj priestorové útvary (Slovensko: trojuholník, štvorec, obdĺžnik, kruh, guľa, kocka, valec; Brandenbursko: bez špecifikácie konkrétnych útvarov; Berlín: kruh, štvoruholník, trojuholník, obdĺžnik, štvorec a bez špecifikácie telies). V sledovaných spolkových krajinách v Nemecku nie je venovaná pozornosť aktivitám v štvorcovej sieti. V slovenskom kontexte majú deti zvládnuť pohyb v štvorcovej sieti pomocou šípok alebo iných dohodnutých symbolov, nakresliť, rozlíšiť, vymodelovať a pomenovať rovnú a krivú čiaru. Učivo o elementoch geometrických zobrazení na Slovensku pozostáva z aktivít zameraných na poskladanie obrázkov z primeraného množstva útvarov podľa predlohy. V Nemecku je táto oblasť rozšírená o navrhovanie a vytváranie vzorov a ornamentov, ako aj poznanie symetrie založenej na bádateľskej činnosti so zrkadlom (propedeutika osovej súmernosti).

V oblasti ***množinové predstavy*** boli identifikované spoločné vzdelávacie témy zamerané na *triedenie,* s cieľom pochopiť podobnosť a rozdielnosť vecí na základe rôznych charakteristík (napr. tvar, veľkosť, farba). S binárnou reláciou *usporiadanie* sa deti predškolského veku v spolkovej krajine Berlín stretnú v kontexte porozumenia usporiadaným štruktúram v súvislosti s časom: pred – po, včera – dnes – zajtra, hodina – deň – mesiac – rok. V slovenskom vzdelávacom programe je problematika práce s časom a orientácia v čase súčasťou vzdelávacej oblasti Človek a spoločnosť. Slovenské kurikulum obsahuje aj ďalšie elementy na aplikáciu relácie usporiadania s požiadavkou, aby pri usporiadaní troch predmetov dieťa určilo predmet s najväčším zvoleným rozmerom. Túto skutočnosť má vysloviť pomocou slov s predponou naj (najdlhší, najkratší, najužší, najtenší ...). Vie usporiadať podľa veľkosti určeného rozmeru tri až štyri predmety. V usporiadanom rade určí objekt na základe slov prvý, druhý, tretí, štvrtý, posledný, predposledný, pred, za, hneď pred a hneď za. Opíše polohu predmetov v usporiadanom rade a umiestni v ňom predmet podľa týchto pokynov.

Okrem vyššie uvedených oblastí kurikulum v spolkovej krajine Berlín poukazuje na potrebu využívania vizuálnej podpory pri porovnávaní čísel a množstiev pomocou tabuliek, diagramov a schém. V slovenskom vzdelávacom programe sa vyskytuje vzdelávacia oblasť zameraná na logiku, v rámci ktorej je požadované, aby dieťa vedelo rozhodnúť o pravdivosti, resp. nepravdivosti jednoduchých tvrdení.

5. Záver

Z pohľadu dimenzie času edukácie zahŕňa predškolská príprava v komparovaných spolkových krajinách Brandenburg, Berlín a na Slovensku rovnaké vekové obdobie detí od troch do šiestich rokov. Z pohľadu dimenzie obsahu má Slovensko jedno spoločné národné kurikulum. V Spolkovej republike Nemecko existujú v každej spolkovej krajine špeciálne dokumenty pre obsah vzdelávania, ktoré však majú istý spoločný rámec. Matematická edukácia v predškolskom veku má v spolkovej krajine Berlín štatút samostatnej oblasti vzdelávania, v spolkovej krajine Brandenburg je súčasťou širšieho vzdelávacieho bloku, v ktorom je integrované aj prírodovedné vzdelávanie. V tomto kontexte je možné vidieť paralelu s kurikulárnym dokumentom na Slovensku, kde matematická príprava je v spoločnom bloku zaoberajúcim sa prácou s informáciami. Z pohľadu manažovania je predškolská edukácia na Slovensku v gescii ministerstva, ktoré má vo svojej agende hlavne školstvo (Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu). V Nemecku nie je predškolské vzdelávanie v agende ministerstva špecializujúceho sa na školstvo, ale je takmer výlučne v kompetencii sektoru starostlivosti o deti, mládež a rodinu. Absolvovanie predškolskej edukácie je v komparovaných krajinách na báze dobrovoľnosti.

Na základe komparatívnej analýzy zamýšľaného kurikula na Slovensku a v spolkových krajinách Brandenbursko a Berlín je možné, z pohľadu matematickej pregramotnosti, identifikovať veľmi podobný a v niektorých oblastiach až identický prístup v príprave detí predškolského veku. Tento pohľad na matematické kurikulum pre deti predškolského veku korešponduje aj so zisteniami I. Scholtzovej a R. Iždinskej (2018), ktoré konštatovali, že obsah matematického vzdelávania vymedzený vo výkonových štandardoch slovenského kurikula a cieľoch vzdelávania a výchovy bavorského kurikula je v oblastiach matematickej pregramotnosti (oblasť predstáv o kvantite, oblasť geometrických predstáv, oblasť množinových predstáv) veľmi podobný. Tiež konštatujeme, že na Slovensku sú pri definovaní obsahu a cieľov podrobnejšie stanovené požiadavky na úroveň výkonu dieťaťa, kým v spolkových krajinách Brandenburg, Berlín je cieľ matematickej prípravy v jednotlivých oblastiach stanovený v širšom kontexte.

Acknowledgements

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu VEGA 1/0844/17 *Identifikácia kľúčových obsahových aspektov matematickej edukácie v predprimárnom vzdelávaní v medzinárodnom a historickom kontexte.*

Literatúra

Berliner Bildungsprogramm für Kitas und Kindertagespflege. (2014). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z https://www.gew-berlin.de/public/media/berliner_bildungsprogramm_2014.pdf.

Gemeinsamer Rahmen der Länder für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen. (2014). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_06_04-Fruehe-Bildung-Kitas.pdf.

Grundsätze elementarer Bildung in Einrichtungender Kindertagesbetreuungim Land Brandenburg. (dátum neznámy). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://www.mbjs.brandenburg.de/media/lbm1.c. 312232.de.

Ježková, V., Von Kopp, B., & Janík, T. (2008). *Školní vzdělávání v Německu.* Praha: Karolinum.

Nultý ročník. Odporúčania k výchovno-vzdelávacej činnosti v nultom ročníku základnej školy. (2018). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://www.statpedu.sk/files/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/inovovany-svp-1.stupen-zs/nulty-rocnik_odporucania-k-vychovno_vzdelavacej-cinnosti.pdf.

Průcha, J. (1997). *Moderní pedagogika.* Praha: Portál.

Scholtzová, I., & Iždinská, R. (2018). Matematika v predprimárnej edukácii na Slovensku a v Nemecku (Bavorsku). *Magister: reflexe primárního a preprimáního vzdělávání ve výzkumu, 2*, 9–15. Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://kpv.upol.cz/download/magister/Magister_2-2018.pdf.

Schreyer, I., & Oberhumer, P. (2017). *"Germany – Key Contextual Data". In Workforce Profiles in Systems of Early Childhood Education and Care in Europe, edited by P. Oberhuemer and I. Schreyer.* Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://www.seepro.eu/English/pdfs/GERMANY _Key_Data.pdf.

Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách. (2016). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://www.statpedu.sk/sk/svp/statny-vzdelavaci-program/svp-materske-skoly/.

Teoretické vymezení témat modulu Matematická pregramotnost. (dátum neznámy). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z https://pages.pedf.cuni.cz/sc1/files/2017/06/Teoretické-vymezení-témat-modulu-Matematika.pdf.

Zákon o výchove a vzdelávaní (školský zákon) – Zákon č. 245/2008 Z.z. (2008). Cit. 30. máj 2019. Dostupné z http://www.epi.sk/zz/2008-245.

MATEMATICKÉ UČEBNÍ ÚLOHY OČIMA STUDENTŮ UČITELSTVÍ PRO 1. STUPEŇ ZŠ

Eva NOVÁKOVÁ
Masarykova univerzita v Brně, Pedagogická fakulta (Česká republika)
e-mail: novakova @ped.muni.cz

Abstrakt

V příspěvku prezentujeme výsledky výzkumu, zaměřeného na analýzu studentského přístupu k vybraným nestandardním matematickým učebním úlohám. Sledovali jsme, jak dovedou studenti úlohy z oblasti matematiky primární školy řešit a posuzovat jejich obtížnost. Studentská řešení využívala strategie opírající se o znalosti a mentální vyspělost žáků primární školy. Diagnostická kompetence budoucích učitelů při posuzování obtížnosti úloh pro žáky se ukázala jako málo rozvinutá. Zjištěné skutečnosti považujeme za potřebné zohlednit v didakticky zaměřených předmětech pregraduální přípravy. Kvalifikovaný pohled na různé stránky matematických učebních úloh považujeme za jeden z elementů konstrukce profesní identity učitele.

Klíčová slova: matematická učební úloha, nestandardní/problémově orientovaná úloha, strategie řešení, obtížnost úlohy, student učitelství, žák primární školy

MATHEMATICAL TASKS THROUGH THE EYES OF THE PROSPECTIVE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Abstract

Results are presented of the research focused on the analysis of prospective teachers' approach to selected non-standard mathematical learning tasks. Their ability to solve primary school mathematical tasks and to assess their difficulty was explored. Prospective teachers' solutions used a strategy based on level of knowledge and of mental maturity degree adequate for primary school pupils. However, the diagnostic competence when assessing the difficulty of tasks for pupils turned out to be underdeveloped. Findings of the research should be taken into account in didactically oriented subjects of undergraduate training. A qualified view of the different aspects of mathematical learning tasks should be considered one of the important elements of the teacher's professional identity.

Keywords: mathematical leasing task, non-standard/problem-oriented task, solution strategy, task difficulty, prospective teacher, primary school pupil

1. Úvod

Studium oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ na vysoké škole je multioborové, ale matematická příprava v něm zaujímá významné postavení. Tato pozice matematicky zaměřených předmětů je do určité míry odrazem skutečnosti, že matematika zaujímá také v primárním vzdělávání po českém jazyce co do rozsahu hodinové dotace největší místo. Dlouhodobé zkušenosti však naznačují, že matematika jako studijní předmět nebývá pro studenty učitelství pro 1. stupeň ZŠ předmětem oblíbeným. Jejich znalosti ze střední, ale často i základní školy jsou málo trvalé, mezerovité.

Na počátku didaktické přípravy mají studenti zkušenost s řešením matematických úloh pouze v roli řešitele (žáka): jejich cílem dosud bylo úlohy co nejúspěšněji (správně, rychle, podle požadavků učitele) vyřešit a být za to odpovídajícím způsobem (známkou, pochvalou učitele, vlastním pocitem úspěchu) oceněni. S jinými stránkami práce s úlohami, zejména těmi, kterými mohou regulovat učební činnost žáků a diagnostikovat jejich znalosti, se dosud nesetkali. Neznají typologie úloh, nedovedou kompetentně charakterizovat jejich efektivní využití v různých etapách výuky, například motivační aspekt zejména slovních úloh. Neuvědomují si vliv formulace zadání úloh na strategii a kvalitu žákovských řešení. Nedovedou posoudit obtížnost úloh, identifikovat příčiny chybných žákovských řešení. Z výzkumu reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky (Bártek & Dofková et al., 2017) však vyplývá, že učitelé 1. stupně ZŠ považují problematiku spojenou s řešením úloh žáky za důležitou a uvědomují si její význam pro efektivitu výuky i pro rozvoj svých profesních kompetencí. Jsou si vědomi potřeby permanentního rozvíjení a obohacování poznatků o úlohách získaných na předchozích stupních vzdělávání. V didakticky zaměřených předmětech pregraduální přípravy proto považujeme pozornost věnovanou učebním úlohám za zvláště významnou. Jak uvádí Samková et al. (2016, s. 552), „*úvahy o cestě k učitelské profesi zahrnují charakteristiky znalostí potřebných k jejímu vykonávání*."

Uvedené skutečnosti nás vedly k pokusu poskytnout vybraný soubor nestandardních úloh k řešení studentům, zjistit a analyzovat jejich názory na úlohy a na možnosti jejich řešení žáky 1. stupně základní školy.

2. Teoretická východiska

Dominantním tématem příspěvku jsou učební úlohy jako mentální a komunikační konstrukt, který vyzývá žáka k aktivní činnosti s obsahem (Slavík et al., 2010), jako jádro výukové situace (Janík et al., 2013). Úlohy a jejich řešení žákem patří mezi aktuální výzkumná témata didaktiky matematiky a jsou trvalým předmětem zájmu školské praxe (Vondrová et al., 2015). Řešení úloh je považováno za základní pilíř výuky matematiky, což dobře vystihuje Polyův výrok: „*Matematiku umí ten, kdo umí řešit úlohy*". Vondrová (2013) uvádí, že žák získává matematické znalosti a dovednosti prostřednictvím řešení vhodně zvolených úloh a proto je otázka výběru těchto úloh klíčová. „*Konkrétní využití úlohy se liší v roli, jakou při něm hraje žák, v kognitivní náročnosti úkolů, které žáci musí plnit, v míře, do níž situaci řídí učitel apod*." (Vondrová, 2013, s. 276). Podobně Slavík, Dytrtová a Fulková (2010, s. 31) uvádějí, že učební úloha zakládá edukativní situaci a podmiňuje její formu, organizaci a průběh. Proto nelze učební úlohy chápat jako soubor izolovaných jevů, ale jako součást širší jednotky vyučovací hodiny – výukové situace. Předmětem naší analýzy jsme učinili úlohy, které svým charakterem přesahují obvyklý standard učebnicových úloh. Bývají označovány jako nestandardní (Lišková & Rezek, 2015), problémově orientované (Češková, 2016), případně badatelské, tj. úlohy, podněcující badatelský přístup (Samková et al., 2016). Lišková a Rezek (2015) zdůrazňují, že nestandardními úlohami a problémy nerozumíme úlohy složité, ale takové, které jsou pro žáky zadáním i způsobem řešení neobvyklé a hodí se i pro badatelské aktivity.

3. Metodologie výzkumného šetření

Formulovali jsme dvě výzkumné otázky:

a) Dovedou studenti učitelství 1. stupně ZŠ řešit a reflektovat matematické učební úlohy – nestandardní/problémově orientované – „klokanské" úlohy, určené žákům 1. stupně ZŠ?

b) Dovedou na základě vlastního řešení posoudit obtížnost těchto úloh pro žáky 5. ročníku ZŠ?

Jako výzkumnou metodu jsme použili analýzu řešení souboru úloh studenty a následnou společnou reflexi. Uzavřené úlohy s 5 možnostmi odpovědi jsme vybrali ze soutěžního testu Matematického klokana, kategorie Klokánek[1] z roku 2015. Zvolili jsme osm ze skupiny „pětibodových“, tj. nejobtížnějších úloh. Z předchozího výzkumu (Nováková, 2016) jsme měli k dispozici data, která poskytlo řešení těchto úloh 680 žáky základní školy. To nám také umožnilo konfrontovat studentský pohled na obtížnost úloh se skutečnými výsledky žáků. Respondenty výzkumu byli studenti 3. ročníku oboru učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě MU v Brně, jejich počet činil 47. O záměru výzkumu byli předem informováni. Studenti řešili úlohy individuálně, anonymně[2], v semináři z didaktiky matematiky. Zjištěná data jsme doplnili o výstupy z následné společné reflexe nad jednotlivými úlohami. Diskuse se studenty po skončení řešení – výpovědi studentů – byla zaznamenána diktafonem a následně analyzována.

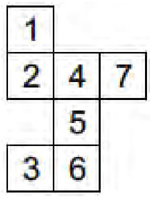
Zadání pro studenty:

- Vyřešte úlohy, zaznamenejte/popište svůj postup řešení.
- Vyznačte na škále, jakou obtížnost úloze přisuzujete (vysoká, střední, nízká).

4. Výsledky výzkumu

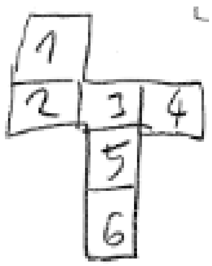
4.1. Řešení úloh studenty a jejich autentická vyjádření k úlohám

1. Lucka chce složit krychli z této sítě. Omylem ale vytvořila síť ze 7 čtverců místo ze 6 čtverců. Který čtverec lze odebrat, aby i bez něj mohla složit krychli?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 7

Předpokladem správného řešení úlohy je znalost pojmu síť krychle tvořené šesti shodnými čtverci (stěnami krychle), které leží v jedné rovině a tvoří jeden rovinný obrazec. Úloha je ukázkou možné strategie řešení uzavřené úlohy – zkoumání jednotlivých případů z nabídky a posuzování, zda různé útvary, které vzniknou po odebrání jednoho čtverce, jsou sítí krychle a umožní „krychli složit“. Při řešení se uplatní prostorová představivost řešitele a vhodný nákres. Poznatek, že krychle má 11 různých možných sítí, prezentovaný v rámci společné reflexe, byl pro některé studenty překvapivý. V popisu postupu řešení jsme také zaznamenali nesprávné vyjádření („strana krychle“).



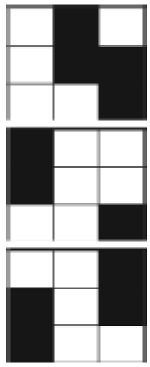
Obrázek 1. Jedno ze správných řešení s „přečíslováním“ čtverců sítě v nákresu.

[1] Kategorie Klokánek je v české verzi soutěže určena žákům 4. a 5. ročníku ZŠ.

[2] Po odevzdání a kvantifikaci studentských prací bylo třeba práce studentům vrátit, abychom mohli společně úlohy reflektovat. Každý respondent si proto označil svou práci zvoleným symbolem, podle kterého ji mohl zpětně identifikovat.

ISSN 2694-8133

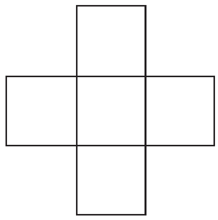
„V hlavě jsem si tu krychli sestavila a odvodila, který čtverec je navíc. Děti si to mohou nakreslit, vystřihnout a vytvarovat."
„Tato úloha se mi velmi líbila, protože mě baví prostorová představivost, a to klidně i ve složitějších zadáních."



2. *Na průsvitný papír nakreslil Zbyněk tři čtverce (podívej se na obrázek). Položil je na sebe a otáčel čtverci (vpravo, vlevo) tak, aby získal co největší počet černých čtverců. Kolik černých čtverců viděl?*
   A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

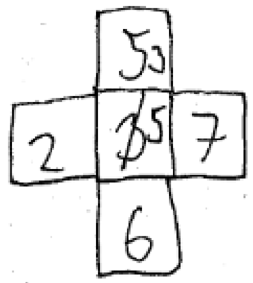
Geometrická úloha, jejíž řešení vyžaduje experiment. Podstatou virtuální/mentální manipulace je otáčení či posunutí čtverců, směřující k překrytí maximálního počtu z 9 malých čtverců černými. Vždy však zůstane jeden čtverec bílý.

„První čtverec nechal stejně, druhý otočil o 90 ° vpravo, třetí o 90 °vlevo."
„Dlouho mi trvalo, než jsem si uvědomila, o co v úloze jde. Všechny čtverce jsem si v představě sjednotila do jednoho obrázku. Poté jsem zkusila pootáčet dva jiné, jestli náhodou nezakryjí větší počet čtverců."
„Mám špatnou prostorovou představivost a tento typ úlohy mi nevyhovuje".



3. *Čísla 2, 3, 5, 6 a 7 napiš do čtverců sestavených do tvaru kříže (podívej se vpravo). Součet čísel v řádku se rovná součtu čísel ve sloupci. Které z čísel může být napsáno uprostřed kříže?*
   A) jen 3 B) jen 5 C) jen 7 D) 5 nebo 7 E) 3, 5 nebo 7

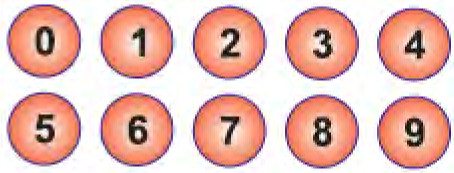
Čísla lze podle podmínek zadání zapsat čtyřmi způsoby, v tomto smyslu jde o úlohu divergentní. Dvě řešení v případě, že uprostřed umístíme číslo 5 (součet čísel v řádku i ve sloupci je 14), další dvě řešení s umístěním čísla 7 do středu (součet čísel v řádku i ve sloupci je 15). Na obrázku je jedno ze studentských řešení, v němž původní nesprávný předpoklad (uprostřed kříže číslo 3) studentka korigovala. Další možnost, s číslem 7 uprostřed, uvedeno není, studentka se spokojila pouze s jedním nalezeným řešením.



Obrázek 2. Opravené řešení, původně nesplňující podmínku zadání.

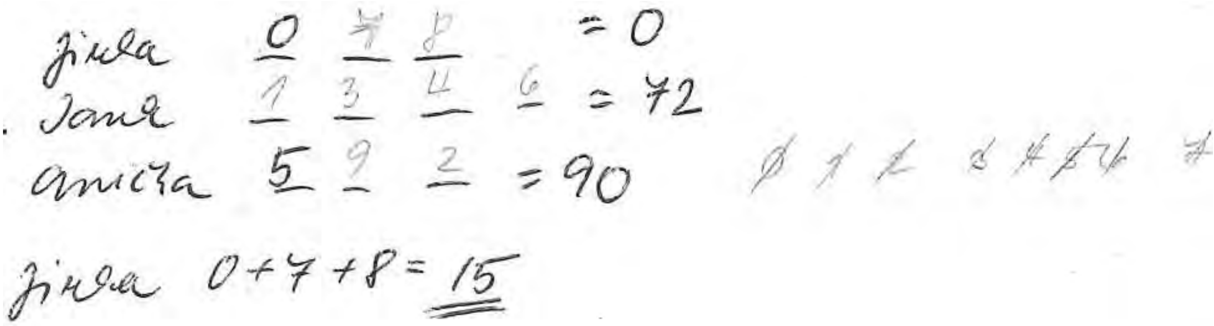
4. *Kája má 10 míčů očíslovaných 0 až 9. Rozdělil tyto míče mezi své 3 kamarády. Jirka dostal 3 míče, Janek 4 a Anička 3. Kamarádi vynásobili čísla na svých míčích a dostali tato čísla: Jirka 0, Janek 72 a Anička 90. Jaký je součet čísel na Jirkových míčích?*

A) 11 *B) 12* *C) 13*
D) 14 *E) 15*



Úloha je náročná na porozumění podmínkám zadání: počet míčů jednotlivých dětí; daný součin tří, resp. čtyř čísel; Jirkův součin roven 0. Číslo 90 (míče Aničky) je součinem tří čísel: 90 = 2 ×·5 × 9, číslo 72 (míče Janka) je součinem čtyř čísel: 72 = 1 × 3 × 4 × 6. Zbývají míče s čísly 0, 7 a 8 musí patřit Jirkovi. Součet 0 + 7 + 8 = 15 je součtem čísel na Jirkových míčích.

Obrázek 3. Studentské řešení s rozkladem čísla 12, aby byla „využita“ čísla 3 a 4 a Janek dostal 4 míče.

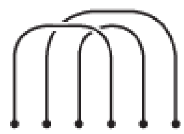


Obrázek 4. Řešení s postupným škrtáním uplatněných čísel.

„Rozdělení míčků podle možných násobků, aby to vycházelo do čísel u kamarádů.“

„Vyzkoušet, která tři čísla dají dohromady 72 → 72:8=9 – první míč, víme, že zbylá čísla dávají 8 →2.4=8 → poslední míč musí být 1. Podobně zbývající, Jirkův míč musí mít 0.“

5. *Na zemi leží tři části hasičské hadice (podívej se na obrázek). Spoj je s dalšími třemi částmi tak, aby tvořily jeden uzavřený celek. Které části vybereš?*



A) *B)* *C)* *D)* *E)*

Součástí zadání je obrázek, obrázky jsou i v nabídce řešení. Každá z nabídnutých odpovědí obsahuje tři různé části, které je třeba spojit se třemi hadicemi na obrázku v zadání. Když očíslujeme jednotlivé konce hadic 1 – 6 v nabídce odpovědí, je třeba připojit konce 1 a 2, 6 a 3, 5 a 4. Studentka doporučuje „pro správné řešení je lepší nakreslit si obrázek, tj. spojit si všechny hadice, protože ne všichni žáci mají takovou představivost“.

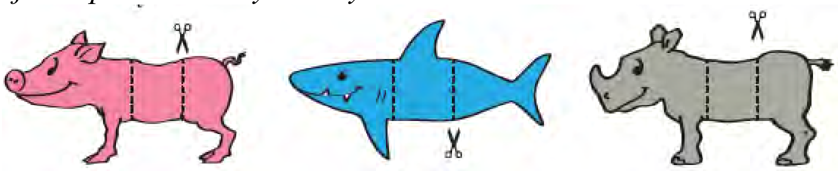
„Úloha vedla zábavnou formou k přemýšlení. Nebyla složitá, ale děti nad ní musejí zapřemýšlet.“

„Tato úloha se mi líbila, protože jsem ještě nic takového neřešila.“

„Úloha se mi líbila. Nebyla těžká a stačilo jen přijít na to.

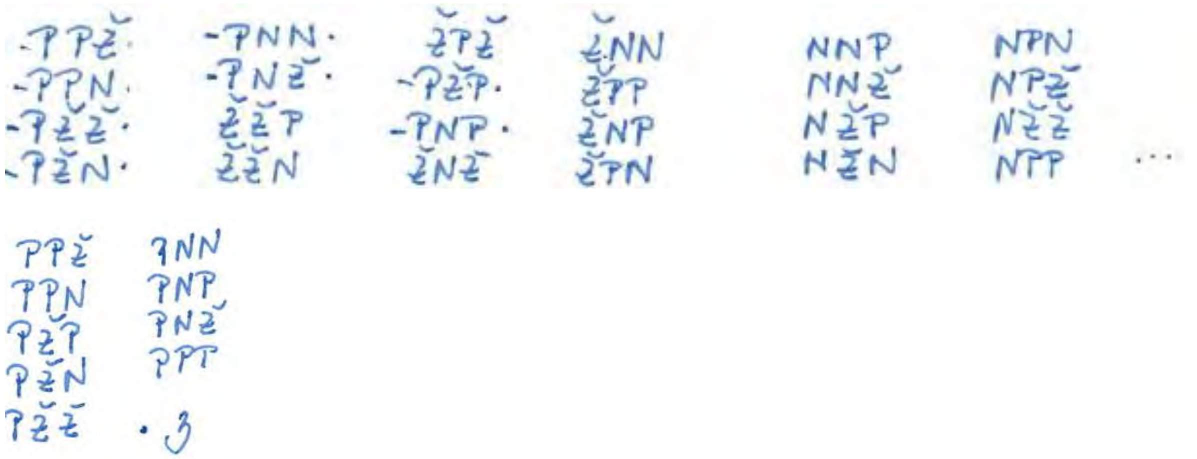
„Líbila se m úloha č. 5, protože řešení lze získat bez přílišného přemýšlení, metodou „pokus – omyl“, logikou.“

6. *Tomáš nakreslil obrázky vepříka, žraloka a nosorožce a rozstříhal je na 3 části (podívej se na obrázek). Potom vytvářel nové obrázky tím, že zaměňoval hlavu, břicho či zadek. Zjisti největší počet takto vytvořených zvířat.*



A) 3 *B) 9* *C) 15* *D) 27* *E) 30*

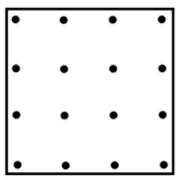
Úloha je propedeutikou kombinatoriky. Studentská řešení se často opírala o experiment, který vyžaduje systematický postup a vhodný písemný záznam všech možností. Studentka, jejíž řešení je v ukázce, nejdříve vyšla z předpokladu, že obrázky nebudou tvořeny všemi částmi těla stejného zvířete. Našla pouze 24 možností. Protože číslo 24 v nabídce odpovědí nebylo, ponechala hlavu prasete a vytvářela všechny kombinace s dalšími částmi žraloka a nosorožce, včetně případu *ppp* (9 možností). Tímto způsobem našla 9 × 3 = 27 různých možností, označila tedy číslo 27 z nabídky.



Obrázek 6. Dvě varianty řešení: nejprve vedoucí k výsledku 24, potom k číslu 27.

„Nelíbila se mi úloha č. 6, zadání mi nepřijde jednoznačné. Může mít zvíře jen jednu cizí část? Nebo dvě?“

7. *Ve čtverci na obrázku je 16 bodů. Jsou od sebe stejně vzdáleny. Maruška tvořila čtverce tak, že vrcholy čtverce byly 4 tečky. Kolik různě velkých čtverců mohla vytvořit?*
A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

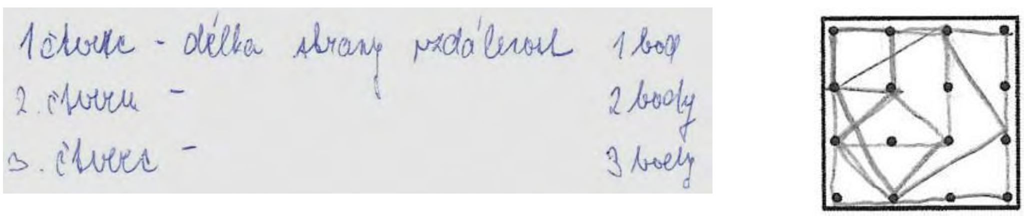


Výsledky řešení studentů se významně lišily od zbývajících úloh. Správně vyřešilo úlohu pouze 38,3 % respondentů, to je nejnižší úspěšnost ze studentských řešení. V řešeních se několikrát uváděl výpočet všech možných čtverců takto: 4 × 4 = 1, 3 × 3 = 4, 2 × 2 = 9. Otázka úlohy však byla formulována jinak.

ISSN 2694-8133

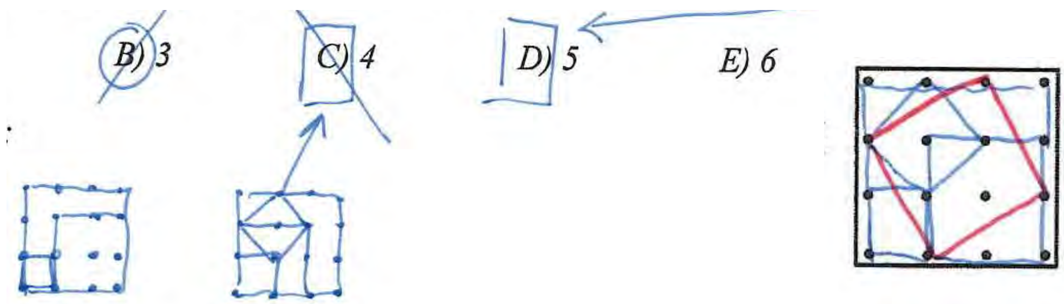
Obrázek 7. Řešitel vypočítal počet všech možných čtverců, nikoli počet různě velkých čtverců.

Byla to prakticky jediná úloha, která činila studentům větší potíže (u zbývajících úloh se nesprávné odpovědi vyskytly pouze sporadicky). Předpokládá se znalost pojmu čtverec a jeho obsah, resp. vztah mezi délkou strany čtverce a jeho obsahem. „Stejně velké čtverce" ve významu shodných čtverců, jejichž obsahy se rovnají, jsou čtverce o stejné délce stran, „různě velké čtverce" musejí mít strany různé délky. I když studentka správně zakreslila čtverce otočené o 30 °, resp. 45 °, přesto je považovala za „stejně velké", jako ty v původní poloze a označila odpověď B.



Obrázek 8. Řešení, které nesprávně interpretuje správně zakreslený obrázek.

Další ukázka dokumentuje, jak studentka postupně docházela ke správnému řešení prostřednictvím zakreslování hledaných čtverců.



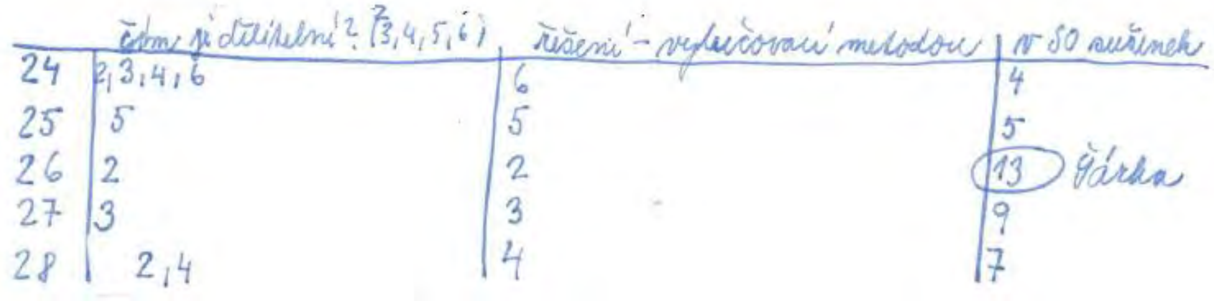
Obrázek 9. Cesta ke správnému řešení postupným vylučováním distraktorů.

Studenti ve svých komentářích projevili značnou „citlivost" na přesnost formulace zadání – termín *čtverec* použitý v různém významu: *…čtverci na obrázku,… tvořila čtverce,…vrcholy čtverce,… různě velkých čtverců.*
„U této úlohy jsem nepochopila zadání ani po několika přečteních."
„Nelíbila se mi úloha č. 7, jelikož není jasné zadání a je matoucí."

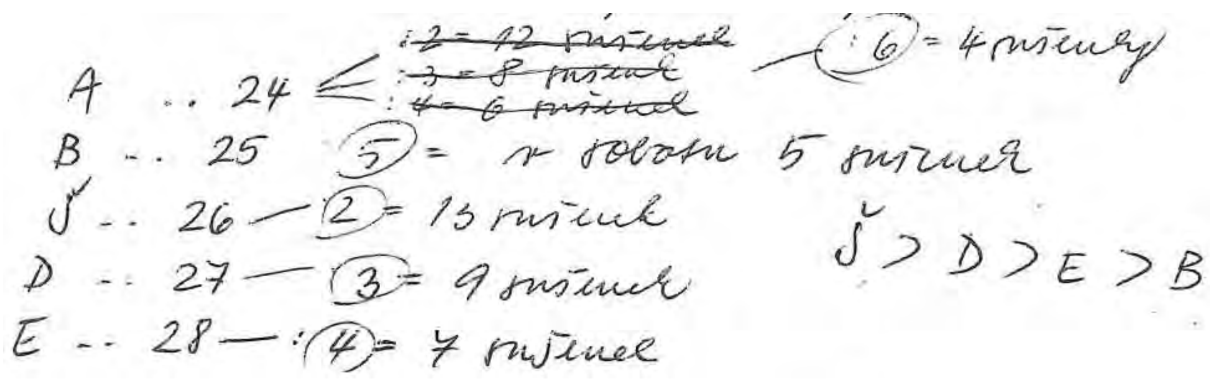
8. *Kamarádi Alenka, Bohunka, Šárka, David a Eliška o víkendu pekli sušenky. Během celého víkendu upekla Alenka 24 sušenek, Bohunka 25, Šárka 26, David 27 a Eliška 28. Na konci víkendu měl jeden z kamarádů dvakrát více sušenek než po sobotě, jiný měl*

třikrát více, další čtyřikrát více, další pětkrát více a poslední šestkrát více. Kdo upekl v sobotu nejvíc sušenek?
A) Alenka B) Bohunka C) Šárka D) David E) Eliška

Slovní úloha, jejíž řešení vyžaduje pozorné čtení zadání a úsudek, založený na inverzním vztahu „*n* krát více“, „*n* krát méně“. Řešitel může úlohu přeformulovat takto: v sobotu upekl jeden z kamarádů dvakrát méně než na konci víkendu, jiný třikrát méně, další čtyřikrát méně, další pětkrát méně a poslední šestkrát méně. Hledáme, která čísla v zadání jsou dělitelná dvěma (24, 26, 28), třemi (24, 27), čtyřmi (24, 28), pěti (25) a šesti (24); ještě je třeba zohlednit skutečnost, že některá čísla jsou zároveň dělitelná více děliteli. Proto měla v sobotu Alenka 24:6 = 4, Bohunka 25:5 = 5, Šárka 26:2 = 13, David 27:3 = 9, Eliška 28:4 = 7 sušenek.



Obrázek 10. Správné řešení využívající dělitele čísel.



Obrázek 11. Postup, který se zřejmě nejvíce blíží úvaze žáka.

„Pěkná je úloha o pečení sušenek, všechno v textu, nic na představivost.“

„Nejvíce mě zaujala poslední úloha. Protože vedla k zamyšlení a prohloubení učiva násobilky. Zadání jsem si musela několikrát přečíst, než mě napadlo řešení.“

„Tato úloha se mi líbila nejvíce. Nenásilně spojovala dělitelnost s násobením v praktickém příkladě.“

4.2 Posouzení obtížnosti úloh pro žáky 1. stupně ZŠ

Zajímavé údaje poskytly názory studentů na obtížnost úloh. Domníváme se, že se do nich promítly dvě vzájemně související skutečnosti: větší či menší problémy studentů s vlastním řešením a jejich „obliba“ typu příslušné úlohy. Zařazení do tří úrovní obtížnosti jsme zpřehlednili v tabulce 1.

ISSN 2694-8133

Tabulka 1. Posouzení obtížnosti jednotlivých úloh studenty (n = 47)

Úloha číslo	Obtížnost						***Výsledky žáků (%)***
	vysoká		střední		nízká		
	n_v	%	n_s	%	n_n	%	
1	12	25,5	28	59,6	7	14,9	***41,0***
2	18	38,3	24	51,1	5	10,6	***34,4***
3	6	12,8	27	57,4	5	10,6	***12,4***
4	26	55,3	17	36,2	4	8,5	***11,5***
5	2	4,3	7	14,9	38	80,9	***11,9***
6	28	59,6	14	29,8	5	10,6	***12,4***
7	14	29,8	13	27,7	20	42,6	***12,6***
8	20	42,6	20	42,6	7	14,9	***10,3***

Zjištěné údaje nás vedou k formulaci některých závěrů:

a) Přestože se jedná o úlohy z matematické soutěže, kterým autoři soutěžního testu přisuzují největší obtížnost zařazením do skupiny „pětibodových“, považuje je řada studentů pro žáky 1. stupně ZŠ za málo obtížné (úloze č. 7 přisuzuje nízkou obtížnost 42,6 %, úloze č. 5 dokonce 80,9 %). Za nejobtížnější byly studenty považovány úloha č. 6 a úloha č. 4.

b) Studentské odhady úspěšnosti řešení jednotlivých úloh žáky se významně lišily, pohybovaly se u některé úlohy v širokém rozmezí od 5 % do 100 %. Například úloha č. 7 byla považována za velmi obtížnou 29,8 % respondentů, nízkou obtížnost téže úloze přisuzuje 42,6 % studentů. Do studentských odhadů se zřejmě promítly vlastní úspěchy či problémy při řešení.

c) Sdělení o nízké úspěšnosti řešení úloh dosažené žáky v soutěži zjištěné ve výzkumu Novákové (2016) přijali studenti se značným překvapením. Nabízí se hypotéza: skutečnost, že úlohu bez problémů vyřeší učitel (student učitelství), zakládá předpoklad, že ji úspěšně vyřeší i žáci?

5. Shrnutí a závěry

Byla analyzována studentská řešení úloh, rovněž byly zachyceny písemné i verbální výpovědi studentů, v nichž se vyjadřovali k jednotlivým úlohám, ke svému řešení a obtížnosti úloh. Studentům jsme záměrně předložili náročnější úlohy ze soutěže Matematický klokan z několika důvodů. Považujeme je za přiměřené věku řešitelů (4. a 5. ročník ZŠ), i když náročnější než běžné učebnicové úlohy[3]; jsou motivující a mohou žáky zaujmout; přitom se nejedná se o typicky školské úlohy – pro jejich řešení není potřeba znalosti složitého matematického aparátu, stačí základní školské znalosti a dobrý nápad (Vaněk et al., 2018). Odpovídají aktuálnímu kurikulu a poskytují příležitost pro rozvíjení kompetencí žáků, především kompetence k řešení problémů (Nováková, 2018). V reflexi po ukončení řešení byla diskutována rovněž podoba zadaných úloh – uzavřené úlohy s výběrem z pěti nabídnutých odpovědí. Školská praxe i výzkumné studie (Hejný et al., 2013) se přiklánějí k názoru, že řešení uzavřených úloh je v českém školním prostředí málo využíváno, zejména žáci 1. stupně ZŠ nemají s tímto typem úloh dostatečné zkušenosti. Podobné mínění projevili i studenti, s uzavřenými úlohami se dosud setkávali v prostředí primární školy jen minimálně[4]. K určité

[3] Soutěž umožňuje – a předpokládá –kromě nadaných také účast průměrných nebo slabších žáků. Poskytuje jim příležitost vyzkoušet si své možnosti, schopnosti a matematické znalosti, porovnat je se svými vrstevníky v celostátním či mezinárodním srovnání.

[4] Výzkum proběhl na počátku prvního semestru výuky předmětu Didaktika matematiky, před souvislou pedagogickou praxí studentů.

ISSN 2694-8133

nedůvěře při užití uvedeného typu úloh vede i nebezpečí tipování a „náhodného uhádnutí" – například je-li v nabídce pěti odpovědí jedna správná, je pravděpodobnost jejího uhádnutí 20 %. Odpověď neumožňuje odhalit aktivní znalost testovaného jevu: žák by správnou odpověď nevyprodukoval, ale v nabídce odpovědí ji rozezná. Chráska (2007) uvádí, že nabídku výsledků je třeba chápat jako určitou pomoc při řešení úlohy.

Přestože testové úlohy jsou uzavřené, studenti se obvykle neobešli bez pomocných výpočtů, zápisů, poznámek, nákresů. Poznámky, ať už dílčích výpočtů nebo grafických znázornění některých kroků řešení, chybných variant apod., jsme se pokusili využít k rekonstrukci postupů, kterými se studenti pokoušeli získat vhled do úlohy a jejího řešení.

Studenti vyřešili úlohy s výjimkou úlohy č. 7 většinou správně (jen v některých případech tipováním správné odpovědi – přestože byli vyzváni, aby nejen označili správnou odpověď, ale uvedli celý postup řešení), v řadě řešení s několika korekcemi. Při společné reflexi byly konfrontovány řešitelské strategie studentů s očekávanými postupy žáků. Obvykle použili postupy, které lze očekávat také od žáků 1. stupně ZŠ, uplatnili však rovněž znalosti z vyšších stupňů vzdělávání (kombinatorika v úloze č. 6, dělitelnost – násobek a dělitel v úloze č. 8). Přestože všechny úlohy byly zadány slovně, za autentickou slovní úlohu[5] považujeme úlohu č. 8. Výpověď studentky: „Tato úloha mi nepřišla dostatečně jasná, já sama jsem si ji musela několikrát přečíst a stejně jsem ze zadání nepochopila, co po mně chtějí" ovšem připomíná zásadní význam porozumění textu úlohy pro kvalitu jejího řešení, schopnosti vybrat z textu údaje podstatné pro řešení a v širším smyslu nezbytné úrovně čtenářské gramotnosti řešitele.

Z písemných i verbálních výpovědí studentů jsme extrahovali tři úrovně postojů k analýze matematických úloh:

a) Pouhý akcent na správnost řešení bez uvažování o možných strategiích řešení úlohy, o „promítnutí" se do žákovských řešitelských kompetencí a o dalších didaktických souvislostech využití úlohy ve výukových situacích (student setrvává v roli žáka).
b) Projevy rezervovaného postoje k užitečnosti obecnější potřeby „nácviku" práce s úlohami. Student vyžaduje jasný a srozumitelný metodický návod: které úlohy jsou vhodné, jak jejich řešení posuzovat a hodnotit. Hlavním vodítkem jsou pro něj úlohy v učebnici, čím je učebnice barevnější a „modernější", tím lépe.
c) Prezentace studentských postřehů, vypovídajících o tom, že se student již dovede na úlohu a vztah mezi úlohou a řešitelem podívat očima budoucího učitele:

„Pokud dítě zvolí jiný postup řešení, než jaký se probíral, ale dává smysl a lze ho aplikovat i na jiné příklady (je „univerzální"), nezáleží mi na tom. Hlavní je, že dítě ví, jak dojít ke správnému řešení a používá mozek."

„Jak se liší moje řešení od dětí? Hledáme až moc zákeřností a používáme zbytečně těžké operace na místo těch banálních."

„Od dětí očekávám, že přijdou k výsledku spíš přes kreslení, než přes vzorečky."

„Žádná úloha se mi nelíbila, všechny mne otravovaly. Nemám ráda tento typ úloh. Jako malé dítě jsem vždy viděla před sebou spoustu práce, protože mi bylo jasné, že se nejedná jen o výpočet, ale že budu muset zkoušet různá řešení a „možná" na to přijdu."

Prostřednictvím pohledu na vybrané úlohy jsme se pokusili angažovat participanty výzkumu do uvažování o sobě. Schopnost kvalifikovaného pohledu studentů na řešení učebních úloh určených pro žáky 1. stupně ZŠ považujeme za jeden z elementů kontinuálního procesu konstrukce profesní identity učitele. Tento proces je nastartován v didakticky zaměřených

[5] Slovní úlohy jsou takové, které „jsou dány v nějakém řešiteli srozumitelném kontextu a pokládají otázky, které se dají zodpovědět pomocí údajů v textu uvedených" (Vondrová & Rendl, 2015, s. 8). Rozumíme jimi „úlohy z praxe, ve kterých je popsána určitá reálná situace, jež vyúsťuje v problém. Ten je možné řešit buď v realitě nebo matematicky." (Divíšek, 1989, s. 123).

předmětech studia a na začátku profesní kariéry. Za vhodný nástroj přípravy na profesi považujeme reflektivně pojatou výuku, jejímž charakteristickým znakem je snaha změnit akademický přístup, založený pouze na teoretických poznatcích (Janík et al., 2013).

Literatura

Bártek, K., Dofková, R., et al. (2017). *Reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky jako východisko jejich profesního rozvoje.* Olomouc: Univerzita Palackého.

Češková, T. (2016). Výukové situace rozvíjející kompetenci k řešení problémů: teoretický model jako východisko pro analýzu výuky. *Pedagogika*, *66 (5),* 530–548.

Divíšek, J., et al. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. Praha: SPN.*

Hejný, M., et al. (2013). *Čtenářské, matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění šetření TIMSS a PIRLS 2011.* Praha: ČŠI.

Chráska, M. (2007). *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu.* Praha: GradaPublishing.

Janík, T., et al. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky.* Brno: Masarykova univerzita.

Lišková, H. & Rezek, P. (2015). Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy. In *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání Matematika a její aplikace* (s. 101–128). Praha: NÚV.

Nováková, E. (2016). *Analýza úloh ze soutěže Matematický klokan a jejich řešení žáky primární školy.* Brno: Masarykova univerzita.

Nováková, E. (2018). Úloha s výběrem odpovědí v soutěži Matematický klokan – příležitost pro rozvíjení kompetencí žáka? *Učitel matematiky*, *26* (3)*,* 167–183.

Samková, L., Hošpesová, A. & Tichá, M. (2016). Role badatelsky orientované výuky matematiky v přípravě budoucích učitelů 1. stupně ZŠ. *Pedagogika*, *66 (5),* 549–569.

Slavík, J., Dytrtová, K. & Fulková, M. (2010). Konceptová analýza tvořivých úloh jako nástroj učitelské reflexe. *Pedagogika, 60* (3/4)*,* 223–241.

Vaněk, V., Calábek, P. & Nocar, D. (2018). České stopy v Matematickém klokanovi. *Matematika – fyzika – informatika*, *27* (5), 334–346.

Vondrová, N. (2013). Matematika: Štafle aneb učíme žáky řešit úlohy v matematice (276–283). In: Janík, T. et al. *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky.* Brno: Masarykova univerzita.

Vondrová, N. & Rendl, M., et al. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Karolinum.

MODIFIKACE DESKOVÉ HRY „KRYCÍ JMÉNA: OBRÁZKY" A JEJÍ VYUŽITÍ PŘI VÝUCE GEOMETRIE

Jitka PANÁČOVÁ
Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta (Česká republika)
panacova@ped.muni.cz

Abstrakt

Proces identifikace a třídění základních rovinných geometrických útvarů je součástí nezbytných předpokladů pro rozvoj žáků při získávání znalostí o těchto útvarech a jejich vlastnostech. U žáků 1. stupně základní školy se setkáváme s různorodými nepřesnými a chybnými představami o kruhu, čtverci, trojúhelníku a obdélníku (Žilková, Partová, Kopáčová, Mokriš, Tkačik, Gunčaga, Budínová, 2018). Během své praxe jsem u žáků 1. a 2. ročníku zaregistrovala problémy s identifikací základních geometrických útvarů podle názvu. Na základě této zkušenosti jsem za účelem eliminace těchto problémů připravila didaktickou pomůcku (modifikaci deskové hry *Krycí jména: Obrázky*) pro výuku geometrie s pracovním názvem *Hledej obrazce*. Cílem článku je představit pomůcku *Hledej obrazce* a prezentovat úspěšnost jejího využití při nápravě mylných představ o geometrických útvarech u žáků mladšího školního věku v rámci výzkumu na jedné malotřídní základní škole.

Klíčová slova: hra *Krycí jména: Obrázky*, rovinné geometrické útvary, primární vzdělávání, malotřídní škola, miskoncepce, model, ne-model

MODIFICATION OF THE DESK GAME „CODENAMES: PICTURES" AND ITS USE IN TEACHING GEOMETRY

Abstract

The process of identification and sorting of basic planar geometrical figures is part of the prerequisites for the development of pupils in gaining knowledge about these figures and their properties. In primary school pupils we encounter various misconceptions about circle, square, triangle and rectangle (Žilková, Partová, Kopáčová, Mokriš, Tkačik, Gunčaga, Budínová, 2018). In my practice I have registered in the first and second year pupils problems with the identification of basic geometric figures by their name. Based on this experience, I have developed a didactic tool (modification of the desk game *Codenames: Pictures*) called *Look for shapes* for teaching geometry to eliminate these problems. The aim of this article is to introduce tool *Look for shapes* and present the positive impact of its use to rectify misconceptions of geometric figures in pupils of the younger school age based on research at one primary school with composite classes.

Keywords: game *Codenames: Pictures*, plane geometric figures, primary education, school with composite classes, misconception, model, non-model

1. Úvod

Geometrie hraje důležitou úlohu v matematice na prvním stupni základní školy a jedním z prvních témat, kterým se žáci v raném školním a předškolním vzdělávání zabývají, jsou geometrické útvary. Děti získávají základní informace o geometrických útvarech ze svého okolí ještě jako předškoláci, některé z informací tohoto raného věku však mohou být mylné a v budoucnu mohou u dítěte negativně ovlivnit jeho pochopení geometrického útvaru. Jedna ze základních teorií o rozvoji geometrického myšlení zabývající se dětskou klasifikací geometrických útvarů je van Hieleho teorie.

Podle van Hielovy (1986) teorie osvojování pojmů základních rovinných geometrických útvarů, jako jsou kruh, trojúhelník, čtverec a obdélník, přichází žáci do 1. ročníku ZŠ na úrovni *vizualizace*. V tomto období žáci rozpoznávají geometrické útvary podle jejich celkového vzhledu, porovnávají je s jejich doposud známými prototypy, přičemž si nevšímají jejich detailů a nerozlišují jejich vlastnosti. Na úrovni vizualizace by se žáci měli setkávat s co největším počtem příkladů a protipříkladů daných pojmů. Během tohoto procesu je důležité pojmenování a identifikace jednotlivých útvarů a přiřazování názvu útvaru k jeho modelu a naopak. Na této úrovni se žáci rozhodují na základě vjemů, nikoli na základě uvažování, přičemž jazyk a řeč hrají v této etapě významnou roli (Hejný a Kuřina, 2001).

Následuje úroveň *analýzy* (během 3. ročníku dle van Hielovy teorie), kdy žáci rozpoznávají a pojmenovávají geometrické útvary z hlediska jejich významných prvků a některých vlastností (počet stran, počet vrcholů, rovnoběžnost a kolmost stran), přičemž poloha ani velikost útvaru by jim neměla činit problém.

V případě, že výuka neprobíhá optimálně, žáci zůstávají na úrovni vizualizace a setrvávají v miskoncepcích o geometrických útvarech (Budínová, 2015, 2017, 2018; Kopáčová a Žilková, 2016; Žilková, 2013, 2016).

1.1. Úloha učitele na malotřídní škole

Úloha každého učitele na malotřídní škole je náročná z mnoha aspektů, z nichž jedním z podstatných je příprava na vyučování (Tupý, 1978; Emmerová, 2000). Učitel si musí v rámci svých příprav především časově rozvrhnout průběh celého vyučování tak, aby žáci jednoho ročníku mohli samostatně pracovat a on se během této doby mohl souběžně věnovat žákům druhého ročníku. Obvyklým a pravidelným jevem, ke kterému dochází během vyučování, je situace, kdy nadanější žáci jednoho ročníku mají samostatný úkol již vypracovaný, ale učitel je ještě zcela zaneprázdněn výkladem látky pro druhý ročník. Pokud k tomuto jevu dojde, je pak žádoucí, aby učitel nadanější žáky zaměstnal vhodnou aktivitou do doby, než na ně bude moci zaměřit svou pozornost. Pro tyto situace je výhodné využití předem připravených didaktických pomůcek, her a neobvyklých pracovních listů, které si žáci, hotoví se svým úkolem, mohou v této volné chvíli dle vlastního výběru zvolit a vypracovat. V rámci své praxe v této škole jsem se setkala se skutečností, že nabízenou aktivitou pro vyplnění tohoto „prázdného časového prostoru“, kterou si žáci s oblibou volili, byla hra *Krycí jména: Obrázky* (Chvátil, 2016).

1.2. Hra *Krycí jména: Obrázky* a její pravidla

Autorem hry *Krycí jména: Obrázky* je Vladimír Chvátil – český vývojář deskových a počítačových her, absolvent Fakulty informatiky MU v Brně. Tato hra je analogií její starší varianty, velmi úspěšné hry *Krycí jména* (Chvátil, 2015), která získala prestižní německé ocenění soutěže Hra roku 2016 (Spiel des Jahres 2016).

Hra *Krycí jména: Obrázky* je určena pro 2–8 hráčů ve věku od deseti let (úspěšně ji mohou hrát i mladší děti) a má jednoduchá pravidla, která je však třeba striktně dodržovat. Je založená na logické úvaze, kombinatorickém myšlení a odhadu spoluhráče, který má na základě elementárních indicií uhodnout dané hrací karty s popsaným společným prvkem. Tato hra však není explicitně matematická.

Pravidla hry *Krycí jména: Obrázky* jsou ve stručnosti následující: Hráči jsou rozděleni do dvou týmů – modří a červení - přičemž každý tým má svého kapitána (špiona). Oba špioni si vezmou společnou kartu klíče, která je pro ostatní hráče obou týmů skrytá. Na kartě klíče je barevně rozlišeno, jaké obrázky, rozložené do mřížky o rozměrech 5 x 4 na dvaceti náhodně vybraných kartách, přísluší danému týmu. Cílem každého týmu je uhodnout jako první všechny jemu příslušející obrázky, které jsou barevně předurčeny kartou klíče. Tým se přitom snaží předurčený obrázek uhodnout na základě nápovědy svého špiona. Špion, který je na řadě, vybere z nabídky ty obrázky, o kterých předpokládá, že by je mohl jeho tým na základě jeho nápovědy všechny uhodnout. Nápověda je však povolena pouze jednoslovná (jedno slovo, které je společné pro jevy na obrázcích, které špion vybral) s dodatkem jedné číslovky určující počet obrázků, které špion uvažuje.

Obrázek 1. Hra *Krycí jména: Obrázky*

Vybraný příklad počátku samotné hry ilustruje obrázek 2 (karta klíče je v dolní části obrázku 2 uprostřed a určuje karty s obrázky, rozmístěné do mřížky 5 x 4, které mají jednotlivé týmy uhodnout).

Obrázek 2. Příklad počátečního rozmístění karet hry *Krycí jména: Obrázky*

ISSN 2694-8133

Nápověda špiona modrého týmu, který dle karty klíče na obrázku 2 zahajuje hru, by mohla například znít: „Letí dva". Zbývající hráči modrého týmu se pak snaží uhodnout, které dva obrázky měl jejich špion na mysli. Pokud hráči modrého týmu uhodnou první obrázek, přikryje se kartou agenta v barvě jejich týmu, a hráči mohou pokračovat v hádání dále. Tým má tolik pokusů, kolik uvedl číslovkou špion při zadávání nápovědy. Na obrázku 3 je znázorněna situace, kdy hráči modrého týmu uhodli oba špionem uvažované obrázky.

Obrázek 3. Vybraná situace z průběhu hry *Krycí jména: Obrázky*

Pokud hráči neuhodnou správně, obrázek se zakryje kartou agenta druhého týmu nebo neutrální kartou v barvě béžové. Jejich tah končí a na řadě je špion druhého týmu se svou nápovědou. Takto se špioni střídají v zadávání nápověd pro své týmy až do chvíle, kdy má jeden z týmů zakryté všechny obrázky, které měl podle karty klíče uhodnout.

2. Chyby při identifikací geometrických útvarů u žáků 1. a 2. ročníku

Měla jsem možnost učit matematiku v jedné venkovské malotřídní škole, kde jsou žáci 1. a 2. ročníku vyučováni paralelně. Během této praxe jsem zaznamenala u mnohých žáků problémy s identifikací základních rovinných geometrických útvarů. U nemalé skupiny žáků přetrvávaly mylné představy ještě z předškolních zkušeností - některým žákům obou ročníků činil problém geometrické útvary vůbec pojmenovat, u jiných se projevily obtíže útvar identifikovat s ohledem na jeho neobvyklou polohu či velikost. Často žáci chybně docházeli k tomu, že ne-modely geometrických útvarů identifikovali jako jejich modely. Otázky žáků typu: *„Je to čtverec, když to vypadá jako čtverec, ale nemá rovnou stranu?"* se objevovaly velmi často. U mnohých žáků bylo problémem identifikovat trojúhelník, čtverec či obdélník jako mnohoúhelníky, kruh zaměňovali s libovolným útvarem „oválného" tvaru, apod.

S ohledem na výše popsaný teoretický rámec van Hieleho o osvojování pojmů základních rovinných geometrických útvarů lze předpokládat, že žáci tohoto věkového období, by měli mít představy o geometrických útvarech na úrovni vizualizace, popřípadě na pomezí vizualizace a analýzy.

Vzhledem k uvedeným znalostním nedostatkům jsem hledala prostředky, kterými bych svým žákům pomohla tyto nedostatky zredukovat a efektivně napravit nesprávné představy o rovinných geometrických útvarech. Inspiraci jsem k tomuto záměru získala z řady doporučení, která navrhují Budínová (2015, 2017, 2018), Gunčaga a Tkačik (2017) a Žilková (2013).

Moje snahy o nápravu nesprávně budovaných představ o pojmech rovinných geometrických útvarů u žáků 1. a 2. ročníku se zakládaly na využití znalosti pravidel hry *Krycí jména: Obrázky*, která byla ve výuce využívána k efektivnímu vyplnění volného časového prostoru. Za tímto účelem jsem pro žáky vytvořila didaktickou hru s pracovním názvem *Hledej obrazce*, která je do jisté míry analogií hry *Krycí jména: Obrázky* s mírně pozměněnými pravidly.

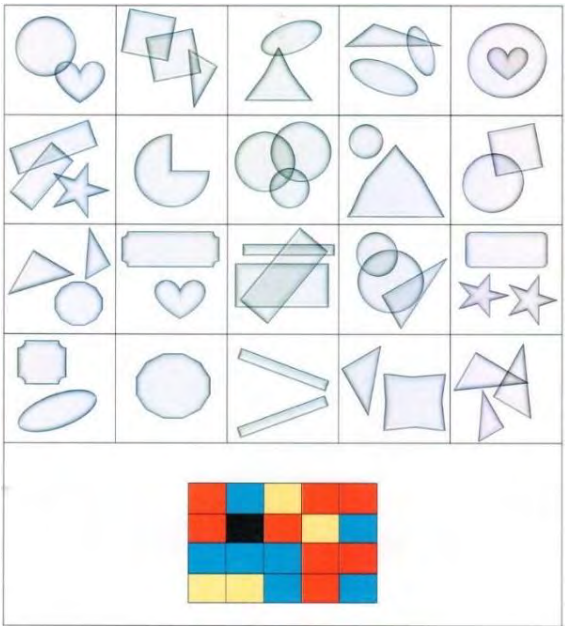
2.1. Pravidla hry *Hledej obrazce* a její zavedení do výuky matematiky

Pravidla hry *Hledej obrazce,* která je třeba striktně dodržovat, jsou stejná jako pravidla hry *Krycí jména: Obrázky* až na následující tři výjimky:

1. Karty s obrázky rozmístěné do mřížky 5 x 4 u hry *Hledej obrazce*, které mají hráči na základě nápovědy špiona uhodnout, obsahují pouze modely a ne-modely základních rovinných geometrických útvarů v různých kombinacích na jedné kartě. Z důvodu rozšíření celkové variability výběru obrázků byly mezi ně zařazeny další geometrické útvary, které jsou žákům dobře známé - hvězdička, srdíčko, apod. Ostatní pomůcky této hry (karty klíče a karty agentů) byly převzaty z hry *Krycí jména: Obrázky* beze změny.

2. Součástí hry *Hledej obrazce* jsou navíc hrací šablony, podle kterých je třeba obrázky na začátku hry do mřížky rozmístit. Tyto šablony byly připraveny na základě zkušeností z testování hry *Hledej obrazce*, při kterém se ukázalo, že náhodný výběr obrázků a jejich seřazení do mřížky by vždy nemusel vést k efektivnímu průběhu hry. Na obrázku 4 je uveden vybraný příklad jedné z těchto hracích šablon, karta klíče je umístěna dole uprostřed.

3. V nápovědě špiona je povoleno více slov určujících společnou vlastnost pro více obrázků, pokud se na nich vyskytují současně dva a více společných geometrických útvarů.



Obrázek 4. Příklad vybrané hrací šablony pro rozmístění karet s útvary

Obrázek 5 ilustruje počáteční situaci hry *Hledej obrazce* dle vybrané šablony z obrázku 4, kdy začínající špion červeného týmu může hru zahájit například nápovědou „Srdíčko, kruh dva“.

Realizace nápadu zavést do výuky matematiky hru *Hledej obrazce* a s jejím využitím u žáků znalostní nedostatky zredukovat mě vedla k otázce: „Jak zjistím, že prostřednictvím této hry vůbec došlo u žáků ke zlepšení v této oblasti?" Vyslovená otázka se stala podnětem k uskutečnění následujícího výzkumného úkolu.

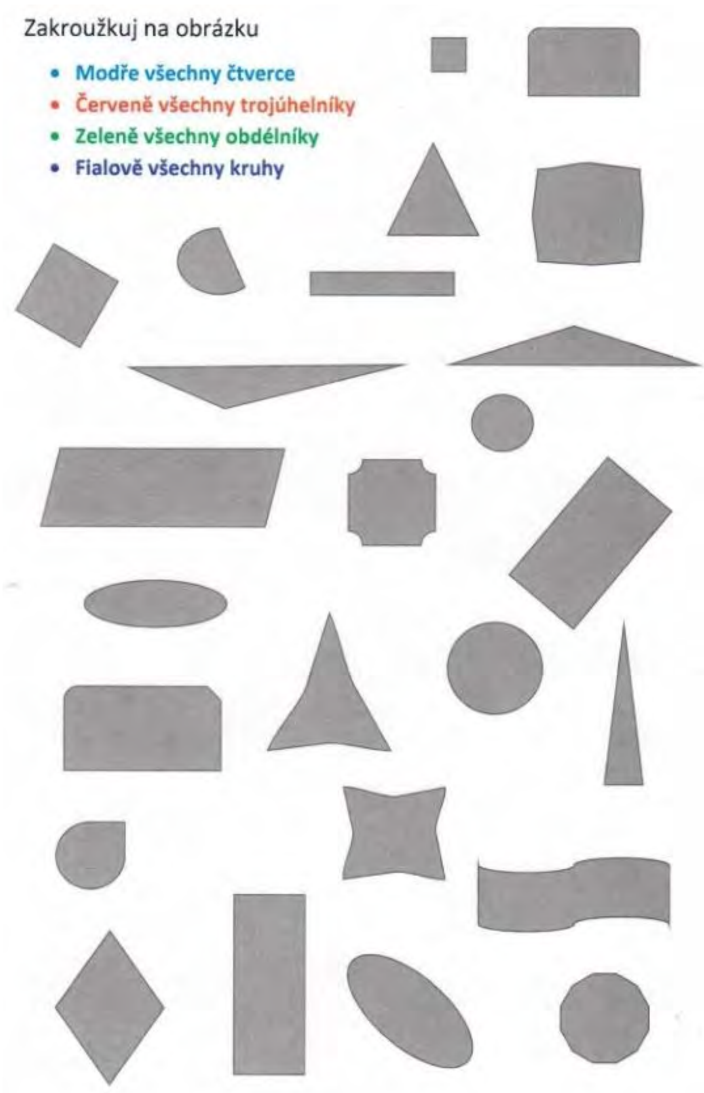
Obrázek 5. Počáteční situace hry *Hledej obrazce* dle šablony na Obrázku 4

3. Metody výzkumu

Výzkumný vzorek tvořilo 12 žáků malotřídní školy (z toho 8 z prvního a 4 z druhého ročníku). Cílem výzkumu bylo zjistit, zda došlo ke snížení chybovosti žáků při identifikaci geometrických útvarů podle názvu poté, co si ve výuce geometrie všichni několikrát zahráli hru *Hledej obrazce*. Výzkum byl proveden v následujících krocích:

1. Pro žáky obou ročníků jsem připravila jednotný test (s pracovním označením *T1*) zaměřený na aktuální odhalení chybovosti při identifikaci geometrických útvarů podle názvu. Zadání testu *T1* je uvedeno na obrázku 6, úkolem žáků bylo zakroužkovat v něm modře všechny čtverce, červeně všechny trojúhelníky, zeleně všechny obdélníky a fialově všechny kruhy.
   Test *T1* byl oběma ročníkům zadán současně. Chybovost jednotlivých žáků v testu *T1* je zaznamenána níže v Tabulce 1.
2. Po realizaci testu *T1* se žáci obou ročníků v následujících dvou týdnech průběžně seznamovali v hodinách matematiky s hrou *Hledej obrazce* a měli všichni možnost si ji během této doby několikrát zahrát.
   Hru *Hledej obrazce* takto běžně hrálo současně 8 i více žáků složených z prvňáků i druháků. Vzájemná komunikace a spolupráce žáků během hry, na kterých je její princip podstatně založen, vedla k tomu, že se žáci sami mezi sebou doplňovali, opravovali si případné chyby, kladli si navzájem dotazy a radili se. V případě nejasností, kdy měli například problém v rozlišení modelu a ne-modelu rovinného geometrického útvaru, jsem jim byla nápomocná a nejasnou situaci jsme si společně vysvětlili. Konfrontace žákovských úvah a kooperativní diskuse nad jednotlivými obrazci a jejich názvy byly podnětem k tomu, aby žáci sami nad názvy útvarů aktivně přemýšleli a hledali jejich společné vlastnosti a prvky.
3. Po dvou týdnech kontaktu s hrou *Hledej obrazce* žáci opět vypracovali stejný test (s pracovním označením *T2*). Porovnání chybovosti jednotlivých žáků u těchto totožných testů *T1* a *T2* interpretuje Tabulka 1. U obou testů jsou údaje o chybovosti žáků v Tabulce 1 rozděleny do tří sloupců:

- Ve sloupcích s hlavičkou *Počet chyb celkem (T1) / (T2)*, které jsou odlišeny modře, jsou u obou testů *T1* a *T2* uvedeny celkové počty chybných odpovědí každého žáka.
- Ve sloupcích s hlavičkou *Chybně označený útvar (T1) / (T2)* je u obou testů *T1* a *T2* u každého jednotlivce evidován počet odpovědí, u kterých byl chybně označen útvar, jenž nevyhovoval zadání testu. Chyby tohoto druhu se ve všech případech projevily v označení ne-modelu rovinného geometrického útvaru, které žáci považovali za model.
- Ve sloupcích s hlavičkou *Neoznačený zadaný útvar (T1) / (T2)* jsou u obou testů *T1* a *T2* uvedeny počty odpovědí, kdy jednotlivec zadaný geometrický útvar nepoznal, a tedy ho neoznačil.



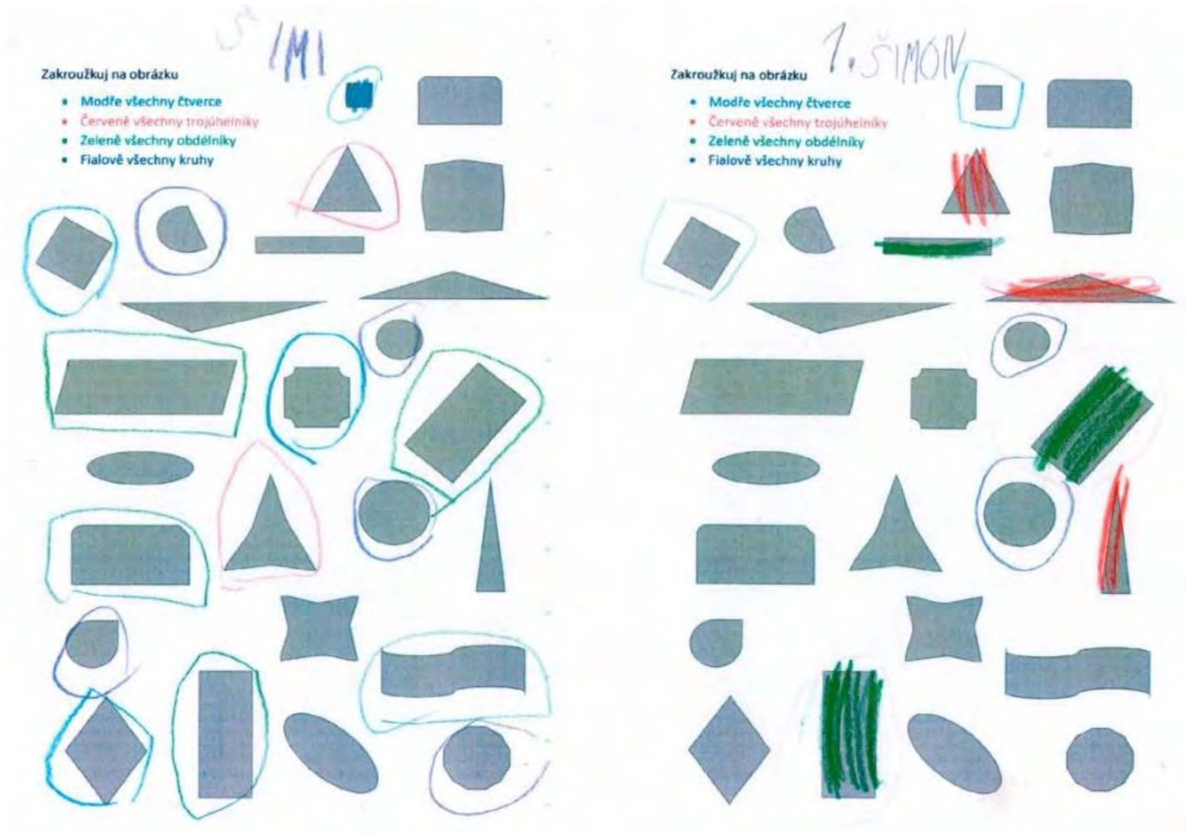
Obrázek 6. Zadání testu *T1 / T2*

ISSN 2694-8133

Tabulka 1. Porovnání chybovosti žáků u testů *T1* a *T2*

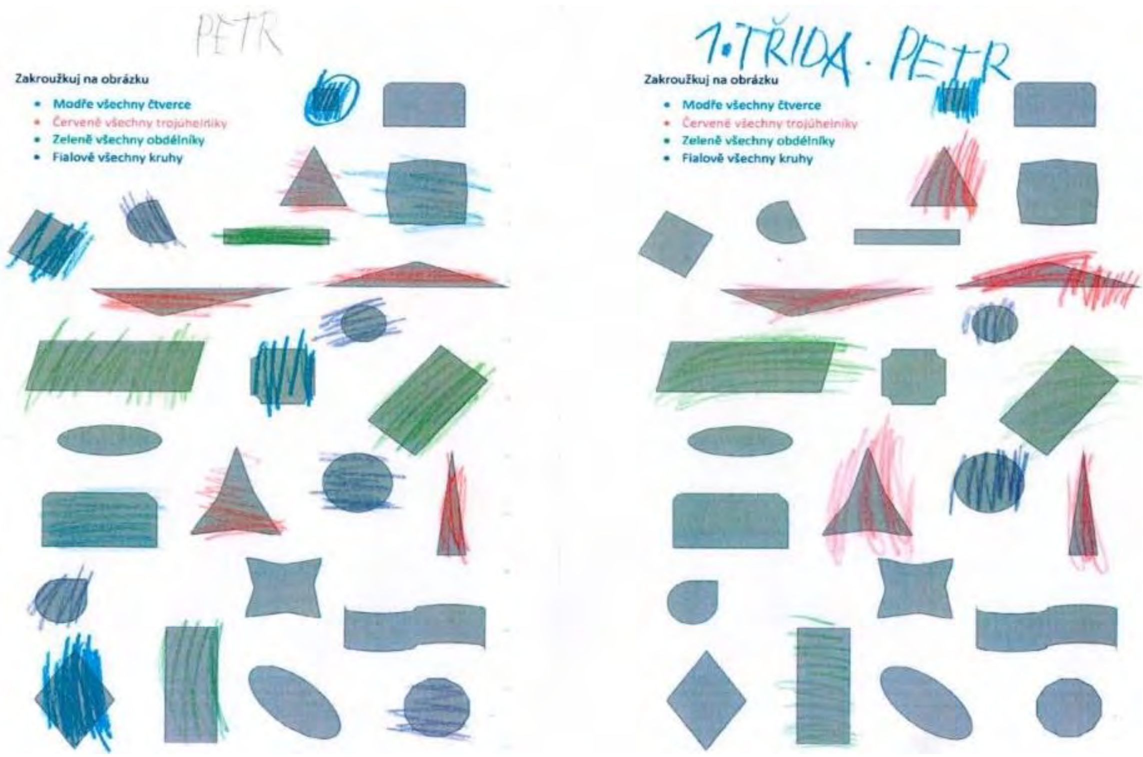
Ročník	**Jméno**	**Počet chyb celkem (*T1*)**	**Chybně označený útvar (*T1*)**	**Neoznačený zadaný útvar (*T1*)**	**Počet chyb celkem (*T2*)**	**Chybně označený útvar (*T2*)**	**Neoznačený zadaný útvar (*T2*)**
2. ročník (4 žáci)	Baru	1	1	0	0	0	0
	Marie	2	1	1	1	0	1
	Lucie	4	2	2	2	1	1
	Kája	1	1	0	1	1	0
1. ročník (8 žáků)	Kiki	1	1	0	0	0	0
	Jareček	14	9	5	2	0	2
	Staník	10	8	2	2	0	2
	Bertík	9	6	3	2	1	1
	Šimi	13	9	4	1	0	1
	Vašek	13	13	0	0	0	0
	Petr	9	9	0	4	2	2
	Klára	6	3	3	3	1	2

Na Obrázcích 7 a 8 jsou uvedeny oba vypracované testy *T1* (vlevo) a *T2* (vpravo) dvou vybraných žáků z 1. ročníků.



Obrázek 7. Vypracované testy *T1* (vlevo) a *T2* (vpravo) vybraného žáka 1. ročníku

ISSN 2694-8133



Obrázek 8. Vypracované testy *T1* (vlevo) a *T2* (vpravo) vybraného žáka 1. ročníku

3.1. Shrnutí výsledků výzkumu dle údajů Tabulky 1

Údaje v Tabulce 1, v níž jsou zaznamenány výsledné hodnoty provedeného výzkumu, ukazují na chybovost žáků v testech *T1* a *T2* a můžeme je shrnout do následujících zjištění:

- všichni žáci obou ročníků při testu *T1* chybně označili zadané útvary (sloupec s hlavičkou *Chybně označený útvar (T1)*). Jednalo se o situaci, kdy žáci nesprávně označili ne-model rovinného geometrického útvaru, který považovali za model. Výrazněji v tomto případě chybovali žáci 1. ročníku.
- porovnáním výsledků testů jednotlivých žáků, které nalezneme ve sloupcích s hlavičkou *Chybně označený útvar (T1)/(T2)*, lze konstatovat, že u všech žáků s výjimkou jedné dívky došlo k redukci počtu chyb při rozlišení modelů rovinných geometrických útvarů od ne-modelů.
- více jak polovina žáků 1. ročníku a polovina žáků 2. ročníku měla při testu *T1* ještě problém s určením zadaného geometrického útvaru, tj. zadaný geometrický útvar neidentifikovali (sloupec s hlavičkou *Neoznačený zadaný útvar (T1)*). Výraznější chybovost se opět projevila u žáků 1. ročníku.
- porovnání celkové chybovosti jednotlivých žáků (modře zvýrazněné sloupce s hlavičkou *Počet chyb celkem (T1)/(T2)*) v testech *T1* a *T2* odráží skutečnost, že u všech žáků s výjimkou jedné dívky došlo k redukci chybovosti při identifikaci rovinných geometrických útvarů podle názvu. Hodnoty ve sloupcích *Počet chyb celkem (T1)/(T2)* lze interpretovat tak, že dvoutýdenní kontakt s didaktickou pomůckou *Hledej obrazce* u žáků 1. i 2. ročníku měl pozitivní efekt při nápravě jejich chybných představ o geometrických útvarech.

4. Závěr

Zkušenosti s didaktickou pomůckou *Hledej obrazce*, která byla připravená za účelem redukce chyb při identifikaci základních geometrických útvarů podle názvu u žáků 1. a 2. ročníku malotřídní školy, byly v řadě ohledů pozitivní. Žáci měli při hře možnost si zábavnou formou utřídit a ujasnit svoje dosavadní znalosti o rovinných geometrických útvarech. V průběhu hry, jejíž princip je založen na komunikaci a spolupráci, mezi sebou žáci sami rozvíjeli debaty o geometrických útvarech, navzájem se doplňovali, opravovali si chyby, kladli si týmově dotazy a hledali odpovědi. Svoje myšlenky vzájemně konfrontovali a aktivně o útvarech diskutovali, což je vedlo k úvahám o společných vlastnostech jednotlivých útvarů. Výsledky testů *T1* a *T2* výzkumu aplikovaného na vzorku 12 žáků (viz Tabulka 1) ukazují na efektivní dopad hry *Hledej obrazce* při redukci popsaných chyb. Tato zjištění vedou do budoucna k plánům zrealizovat na stejném vzorku žáků analogický výzkum směřující k otázce, zda došlo k nápravě chyb trvale či jen dočasně.

Literatura

Budínová, I. (2015). Možnosti rozvoje geometrických pojmů u matematicky nadaných žáků na 1. stupni ZŠ. *Svět nadání: Časopis o nadání a nadaných, 4* (2), 11–37.

Budínová, I. (2017). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy. *Učitel matematiky*, *25* (2), 65–82.

Budínová, I. (2017). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: čtverec a obdélník. *Učitel matematiky*, *25* (5), 272–286.

Budínová, I. (2018). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: trojúhelník a kruh. *Učitel matematiky*, *26* (1), 1–11.

Emmerová, K. (2000). Malotřídky v současném prostřední českého venkova. *Sborník prací Filozofické fakulty MU, Studia Paedagogica U3-4* (s. 81–96). Brno: MU.

Gunčaga, J., Tkačik, Š. (2017). Príčiny miskoncepcií základných geometrických útvarov u žiakov na prvom stupni základných škôl. *11. mezinárodní vědecká konference – Didaktická konference 2017* (s. 48-59). Brno: MU.

Hejný, M., Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.

Chvátil, V. (2015). *Krycí jména*. Mindok.

Chvátil, V. (2016). *Krycí jména: Obrázky*. Mindok.

Kopáčová, J., Žilková, K. (2016). Žiacke predstavy o štvorchoch. In: M. Uhlířová (Ed.) *Sborník EME 2016 Primární matematické vzdělávání v souvislostech* (s. 132–137). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

Tupý, K. (1978). *K didaktickým problémům málotřídních škol.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.

Žilková, K. (2013). *Teória a prax geometrických manipulácií v primárnom vzdelávaní*. Praha: Powerprint.

Žilková, K. (2016). Preferencia modelov a ne-modelov trojuholníkov žiakmi primárneho vzdelávania. In: M. Uhlířová (Ed.) *Sborník EME 2016 Primární matematické vzdělávání v souvislostech* (s. 257-263). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

Žilková, K., Partová, E., Kopáčová, J., Mokriš, M., Tkačik, Š., Gunčaga, J. & Budínová, I. (2018). *Young children's concepts of geometric shapes.* Harlow: Pearson.

POTENCIÁL MATEMATICKEJ ÚLOHY PRI STIMULÁCII SEBAREGULÁCIE SLABOPROSPIEVAJÚCEHO ŽIAKA

Alena PRÍDAVKOVÁ
Prešovská univerzita v Prešove, Pedagogická fakulta (Slovensko)
alena.pridavkova@unipo.sk

Abstrakt

Sebaregulácia je dôležitým determinantom úspešného riešenia matematických úloh. V príspevku je prezentovaná jedna z možností rozvíjania sebaregulácie, ktorá využíva potenciál matematickej úlohy. Cieľom štúdie je prezentovať jeden zo spôsobov transformácie zadania štandardných matematických úloh tak, aby ich bolo možné aplikovať v zmysle rozvíjania sebaregulácie žiaka. Predstavená je administrácia súboru úloh pri práci so slaboprospievajúcimi žiakmi. V uvedenom kontexte bol v projekte APVV-15-0273 vytvorený a experimentálne overený kurikulárne orientovaný intervenčný program EXEFUN-MATH. Program je tvorený súborom matematických úloh rôznej úrovne kognitívnej náročnosti. Výsledky analýzy záznamov z participačného pozorovania intervencie ukazujú, že matematická úloha má potenciál, ktorý je možné využiť na rozvoj sebaregulácie slaboprospievajúceho žiaka.

Kľúčové slová: matematická úloha, sebaregulácia, slaboprospievajúci žiak

THE POTENTIAL OF MATHEMATICAL TASK IN STIMULATING SELF-REGULATION OF A WEAK-LEARNER

Abstract

Self-regulation is determinant of successful mathematical task solving. One possibility of developing self-regulation through mathematical task is presented in the article. The main aim of study is to present one way of mathematical task transformation to mean of stimulating self-regulation in the group of weak pupils. Work with the set of math tasks to low performing pupil is presented. In this context, the objective of research APVV-15-0273 was to develop and experimentally verify a mathematical intervention programme EXEFUN-MATH. The programme is created by mathematical tasks of different levels of cognitive demand. The partial results of research project and analysis of observations show that mathematical tasks have the potential which can be used to stimulate self-regulation of a weak-learner.

Keywords: mathematical task, self-regulation, weak-learner

1. Úvod

V posledných rokoch sa otvoril odborný diskurz o exekutívnych funkciách a ich význame v procese učenia sa žiaka. Exekutívne funkcie sú vnímané ako mentálne úkony riadiace proces spracovania podnetov a informácií, kontroly a organizácie kognitívnych procesov. Spomenuté funkcie sú manifestované najmä v procesoch inhibície, kontroly pozornosti, pracovnej pamäti, sebaregulácie a plánovania (Bull & Scerif, 2001; Pennington & Ozonoff, 1996; St Clair-Thompson & Gathercole 2006), predstavujú prerekvizitu pre školský výkon a sú základom pre učenie sa (Meltzer, 2018). V procese učenia sa matematiky je dôležité, aby bol žiak schopný spracovávať podnety a informácie, následne ich organizoval, usporadúval, triedil, automatizoval a používal osvojené zručnosti. Deficity v niektorých z týchto činností môžu byť dôsledkom nedostatočne rozvinutých exekutívnych funkcií, ako aj metakognitívnych schopností. Exekutívne funkcie sú v interakcii s metakognitívnymi schopnosťami (Meltzer, 2013), akými sú napríklad uvedomenie si potreby zamerať pozornosť podľa požiadaviek úlohy, schopnosť uvedomiť si potrebu kontroly vlastnej pozornosti, schopnosť vedomej perzistencie, a sebaregulácia.

Sebaregulácia je proces, kedy žiak prispôsobuje vlastné správanie sa a myšlienky s cieľom dosiahnutia istého výsledku (Kovalčíková et al., 2015, s. 82). Dáva sa do súvislosti so správaním orientovaným na ciele a štandardy. Sebaregulácia zahŕňa štyri flexibilne zoradené fázy kognície: vnímanie úlohy (zbieranie informácií týkajúcich sa úlohy), stanovenie cieľa a plánovanie, vykonanie úlohy a prepracovanie úlohy (vyhodnotenie výkonu a prepracovanie stratégie riešenia úlohy). Sebaregulované učenie sa je riadené metakogníciou, strategickým konaním a motiváciou učiť sa. Ak žiak pri riešení matematickej úlohy uvažuje nad použitou stratégiou, uvedomuje si ako premýšľa a je schopný verbalizovať použitý postup riešenia, využíva pritom metakognitívne schopnosti (Frobisher & Frobisher, 2015), ktoré predstavujú kľúčový determinant úspešnosti riešenia matematických úloh. Sebaregulácia ako súčasť myslenia je aktívna aj v procese učenia sa matematiky, kedy je dôležité, aby si žiak formuloval cieľ úlohy, zvolil si primerané stratégie, bol schopný hodnotiť svoj výsledok, uvedomuje si prečo, kde, kedy a ako využije zvolenú konkrétnu stratégiu.

Zibrinyiová (2014) uvádza, že sebareguláciu je vhodné vnímať ako kapacitu, ktorá je trénovateľná, čo predstavuje predpoklad pre tvorbu stimulačných programov. Intervencie metakognitívneho charakteru môžu mať pozitívny vplyv na výkony v matematike (Smith & Mancy, 2018). Ukazuje sa, že metakognitívne stratégie je možné sa naučiť a žiaci tak môžu z nadobudnutých poznatkov profitovať pri riešení matematických problémov. Dôležitosť metakognície pri riešení matematických úloh a rozvoji matematických schopností potvrdzujú aj Garofalo & Lester (1985). Už u detí mladších ako päť rokov je vhodné realizovať intervencie zamerané na rozvoj metakognitívnych schopností využitím doménovo-špecifických programov (Vo, Li, Kornell, Pouget, & Cantlon, 2014). Napríklad metakognícia v numerickej oblasti je predpokladom školskej úspešnosti v danej oblasti. Cornoldi, Carretti, Drusi, & Tencati (2015) potvrdzujú existenciu vzťahu medzi metakognitívnym monitorovaním výkonu a matematickými schopnosťami u žiakov mladšieho školského veku (vo veku 8–10 rokov). Realizovaním tréningu metakognitívnych stratégií a pracovnej pamäti, využitím špecifických aktivít, je možné zvýšiť úspešnosť žiakov pri riešení matematických problémov. Aj Blair & Razza (2007) poukazujú na význam sebaregulácie pri formovaní akademických schopností u detí vo veku 3–5 rokov pochádzajúcich zo sociálne znevýhodneného prostredia.

Uvedené zistenia naznačujú, že kurikulum zamerané na zlepšenie sebaregulačných schopností môže byť prínosné v oblasti školských výkonov. Prezentované výsledky výskumov ukazujú na dôležitosť metakognitívnych stratégií a schopností pri úspešnom riešení matematických úloh v rôznych vekových skupinách. Sebareguláciu, ako jednu z metakognitívnych schopností, je možné rozvíjať vo vyučovaní a učení sa matematiky.

2. Charakteristika intervenčného programu

Cieľom výskumu, realizovaného v rámci projektu APVV-15-0273, bolo vytvorenie a aplikácia doménovo-špecifického stimulačného programu z matematiky (EXEFUN-MATH) v skupine žiakov na konci 1. stupňa základnej školy. Program bol kreovaný pre slaboprospievajúcich žiakov so zámerom rozvíjať u nich schopnosť učiť sa, cez stimuláciu exekutívnych funkcií a metakognitívnych schopností prostredníctvom súborov gradovaných matematických úloh. Sebaregulácia bola u žiakov stimulovaná v priebehu každej intervencie využitím metakognitívnej zložky programu. Východiská a proces tvorby programu prezentujú Prídavková et al. (2018). Intervencia bola realizovaná vo forme párovej stimulácie, kedy mal administrátor vytvorené podmienky pre tvorbu a realizáciu dialógov a dostával sa tak do pozície inštruktora a facilitátora. Pomocou kladenia otázok mal možnosť stimulovať a rozvinúť individuálne žiacke uvažovanie, metakognitívne schopnosti – medzi nimi aj sebareguláciu. V procese riešenia úloh administrátor zadával žiakovi/žiakom inštrukcie a otázky zamerané na vysvetlenie postupu použitého pri riešení úlohy a na verbalizáciu myšlienkových procesov. Dôležité pritom bolo, aby otázky boli zadávané postupne po jednej a žiak mal dostatočný časový priestor na to, aby odpovedal na zadanú otázku a verbalizoval tak svoje myšlienkové postupy.

3. Stimulácia sebaregulácie pri riešení matematickej úlohy

Prezentovaná bude ukážka matematickej úlohy, ktorá je súčasťou stimulačného programu EXEFUN-MATH. Úloha je kurikulárne zaradená do témy *postupnosti*, kde sú využité postupnosti čísel. Úlohy v stimulačnom programe majú gradovanú úroveň kognitívnej náročnosti, kde za členy postupností sú zvolené objekty rôzneho charakteru: reálne predmety, geometrické útvary, symboly, čísla alebo zvuky. V stimulačnom module, v súbore úloh na danú tému, sú zaradené postupnosti s rôznymi pravidlami pre ich vytvorenie a pri navrhovaní gradovaných úloh boli využité rôzne reprezentácie daného konceptu (manipulatívna, ikonická, symbolická, auditívna).

Zadanie štandardnej školskej matematickej úlohy je možné transformovať na úlohu, ktorá predstavuje prostriedok rozvoja sebaregulácie žiaka. V procese riešenia úlohy nie je nevyhnutné pracovať s pojmom *postupnosť*, ten môže byť nahradený iným ekvivalentom rešpektujúc jazykovú a vedomostnú úroveň cieľovej skupiny žiakov.

ÚLOHA: *Doplň tri čísla, ktoré budú nasledovať:*

A) 10, 12, 10, 12, 10, 12, __, __, __

B) 10, 12, 10, 14, 10, 16, __, __, __

C) 2, 10, 4, 20, 6, 30, 8, 40, __, __, __

Ak sú úlohy uvedeného typu zadané na vyučovaní matematiky na primárnom stupni vzdelávania, štandardne sa od žiakov očakáva vymenovanie (resp. zapísanie) hľadaných troch členov postupnosti (nasledujúcich čísel), pričom spätná väzba zo strany učiteľa je vo forme *Je/nie je to správne.* V prípade, že v zadaní nie je uvedený pokyn *nájdi pravidlo, podľa ktorého bola postupnosť vytvorená*, tak tomu zvyčajne na vyučovaní nie je venovaný priestor. Žiak tak nemá spätnú väzbu, nevie, prečo je úloha vyriešená správne/nesprávne, nevie, kde urobil chybu, ako má začať, o čom má uvažovať, na čo má dávať pozor a preto pri riešení úlohy zlyháva a v konečnom dôsledku sa stáva slaboprospievajúcim žiakom.

Ako bolo uvedené vyššie, sebaregulácia zahŕňa štyri flexibilne zoradené fázy kognície: (1) vnímanie úlohy (zbieranie informácií týkajúcich sa úlohy), (2) stanovenie cieľa a plánovanie postupu, (3) vyriešenie úlohy, (4) vyhodnotenie výkonu (prepracovanie stratégie riešenia úlohy). Na základe tejto charakteristiky je zadanie a proces riešenia uvedenej úlohy doplnený inštrukciami a otázkami metakognitívneho charakteru a úloha môže byť využitá ako prostriedok stimulácie sebaregulácie.

ÚLOHA A: *Dobre sa pozri na tento rad čísel. Doplň tri čísla, ktoré budú nasledovať.*

Žiak sa pozrie na zadanie úlohy, ktoré je prezentované v písomnej forme a nasleduje pokyn zo strany administrátora:

Povedz, čo máš urobiť. Čo je tvojou úlohou?

Žiak nahlas vysloví zadanie úlohy, resp. vlastnými slovami vysvetlí, interpretuje, čo sa od neho požaduje. V tejto fáze ide o to, aby si uvedomil, či porozumel zadaniu úlohy, všetkým pojmom, ktoré sa v zadaní vyskytujú. Žiak si stanoví cieľ, naplánuje proces riešenia úlohy a mal by byť schopný odpovedať na otázky, ako napríklad: *Ako začneš? Čo urobíš najprv? Čo je dôležité?* V procese riešenia úlohy – pri dopĺňaní ďalších členov postupnosti je dôležité, aby si žiak uvedomil dôležitosť verbalizácie použitej stratégie riešenia. Ide o uvedomenie si potreby monitorovania plánu riešenia, čo je možné podporiť otázkami typu: *Postupuješ podľa tvojho plánu? Urobil si chybu?*

Po doplnení čísel nasleduje vyhodnotenie a analýza procesu riešenia, opäť využitím otázok zo strany administrátora, napríklad: *Vysvetli, ako si postupoval. Prečo si doplnil práve tieto čísla? Myslíš, že si to urobil správne? Čo je potrebné si všímať? Kde si urobil chybu? Prečo si sa pomýlil?*

V prípade párovej stimulácie je vhodné zadávať aj otázky: *Vedel by si poradiť spolužiakovi, ako má postupovať pri riešení takejto úlohy? Na čo musí dávať pozor? Stretol si sa už s takouto úlohou? Kde? Zopakuj, čo bolo pri riešení dôležité? Čo si sa naučil? Kde to môžeš využiť?*

Analogicky je možné postupovať pri riešení úloh B a C. Predstavené úlohy sú gradované na základe kritéria, ktorým je pravidlo pri vytváraní postupnosti. V prípade, že žiak má problém s identifikovaním pravidla, je možné využiť manipulatívnu verziu úlohy, kde sú jednotlivé členy postupnosti, v danom prípade sú to čísla, znázornené na kartičkách, ktoré sú uložené na stole. Administrátor rozmiestni kartičky s číslami tak, aby bolo možné na základe vizuálneho znázornenia jednotlivých členov identifikovať pravidlo pre tvorbu postupnosti. Napríklad:

10, 12, 10, 14, 10, 16, __, __, __

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\boxed{\mathbf{10}}$ $\boxed{\mathbf{10}}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\boxed{\mathbf{14}}$ $\boxed{\mathbf{16}}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

2, 10, 4, 20, 6, 30, 8, 40, __, __, __

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\mathbf{8}}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\boxed{\mathbf{20}}$ $\boxed{\mathbf{30}}$ $\boxed{\mathbf{40}}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

Iný spôsob gradácie úloh na vyššiu úroveň kognitívnej náročnosti predstavuje napríklad zmena zadania postupnosti z písomnej (vizuálnej formy) na formu auditívnu.

V takom prípade sú jednotlivé členy postupnosti zadávané vo forme slov (desať, dvanásť, desať, dvanásť, desať, dvanásť ....) a dôležité je pritom zapojiť aj pracovnú pamäť.

4. Záver

Matematická úloha má potenciál pre zvyšovanie úrovne sebaregulácie a pre rozvíjanie schopnosti učiť sa aj u žiakov, ktorí zaznamenávajú slabý výkon v matematike. Ak je proces riešenia úlohy obohatený inštrukciami a otázkami zameranými na metakognitívnu stránku myslenia a sebareguláciu, tak aj slaboprospievajúci žiak má možnosť verbalizovať svoje myšlienky, postupy, učí sa uvedomovať si ako má postupovať pri riešení úlohy, prečo rieši úlohu daným spôsobom, kde a kedy môže daný postup využiť v inom kontexte. Poskytovanie verbalizovanej spätnej väzby administrátorom a komunikácia postupu riešenia žiakom zohrávajú dôležitú úlohu v procese mediácie, ktorá má metakognitívny charakter. Rôzne typy reprezentácie matematických konceptov slúžia na zorganizovanie, zaznamenanie a komunikovanie procesov myslenia žiaka (Kamii & Housman, 2000) a predstavujú jedno z kritérií pri tvorbe súborov gradovaných matematických úloh.

Vytvorený doménovo-špecifický stimulačný program z matematiky (EXEFUN-MATH) bol aplikovaný v skupine slaboprospievajúcich žiakov s cieľom stimulovať exekutívne funkcie a rozvíjať aj metakognitívne dimenzie myslenia, medzi nimi aj sebareguláciu. Na základe analýzy záznamov z participačného pozorovania realizovanej intervencie je možné potvrdiť pozitívny vplyv stimulácie prostredníctvom matematických úloh na rozvoj sebaregulácie žiakov. Po aplikácii kurikulárne orientovaného stimulačného programu sa ukázalo, že žiaci boli schopní verbalizovať svoje myšlienkové postupy využité pri riešení úloh, boli schopní formulovať cieľ úlohy a hodnotiť svoj výkon.

Acknowledgements

Príspevok bol vypracovaný v rámci grantového projektu *APVV-15-0273 Experimentálne overovanie programov na stimuláciu exekutívnych funkcií slaboprospievajúceho žiaka – kognitívny stimulačný potenciál matematiky a slovenského jazyka.*

Literatúra

Blair, C., & Razza, R. P. (2007). Relating Effortful Control, Executive Function, and False Belief Understanding to Emerging Math and Literacy Ability in Kindergarten. *Child Development*, *78*(2), 647–663.

Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive Functioning as a Predictor of Children's Mathematics Ability: Inhibition, Switching, and Working Memory. *Developmental Neuro-psychology*, *19*(3), 273–293.

Cornoldi, C., Carretti, B., Drusi, S., & Tencati, C. (2015). Improving problem solving in primary school students: The effect of a training programme focusing on metacognition and workingmemory. *British Journal of Educational Psychology*, *2015*(85), 424–439.

Frobisher, L., & Frobisher, A. (2015). *Didaktika matematiky I. Porozumieť. Riešiť. Počítať.* Bratislava: Raabe.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(3), 163–176.

Kamii, C., & Housman, L. B. (2000). *Young Children Reinvent Arithmetic. Implications of Piaget´s Theory.* 2nd edition. New York: Teacher College Press.

Kovalčíková, I. et al. (2015). *Terminologické minimum kognitívnej edukácie*. Prešov: Vydavateľstvo PU v Prešove.

Meltzer, L. (2013). Executive function and metacognition in students with learning disabilities: New approaches to assessment and intervention. *The International Journal for Research in Learning Disabilities, 1*(2), 31–63.

Meltzer, L. (Ed.), (2018). *Executive Function in Education. From Theory to Practice*. Second edition. New York: Guilford Press.

Pennington, B. F., & Ozonoff, S. (1996). Executive Functions and Developmental Psychopathology. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *1996*(37), 51–87.

Prídavková, A., Šimčíková, E., & Tomková, B. (2018). Rozvoj exekutívnych funkcií v matematike prostredníctvom stimulačného programu. *Magister: reflexe primárního a preprimáního vzdělávání ve výzkumu, 2018*(2), 52–58. Dostupné z http://kpv.upol.cz/download/magister/Magister_2-2018.pdf

Smith, J. M., & Mancy, R. (2018) Exploring the relationship between metacognitive and collaborative talk during group mathematical problem-solving – what do we mean by collaborative metacognition? *Research in Mathematics Education*, *20*(1), 14–36.

St Clair-Thompson, H. L., & Gathercole, S. E. (2006). Executive functions and achievements in school: Shifting, updating, inhibition, and working memory. *The Quaterly Journal of Experimental Psychology*, *59*(4), 745–759.

Vo, V. A., Li, R., Kornell, N., Pouget, A., & Cantlon, J. F. (2014). Young children bet on their numerical skills: Metacognition in the numerical domain. *Psychological Science*, *2014* (25), 1712–1721.

Zibrinyiová, V. (2014). Potenciál tréningu exekutívnych funkcií v zlepšovaní sebaregulácie. *Človek a spoločnosť, 17*(4), 53–60.

ISSN 2694-8133

KOMBINATORICKÉ ÚLOHY V UČIVU PRIMÁRNÍ ŠKOLY

Jana PŘÍHONSKÁ
Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická (Česká republika)
jana.prihonska@tul.cz

Abstrakt

Jedním z úkolů školské matematiky je rozvíjet u žáků kombinatorické a logické myšlení, kritické usuzování a srozumitelnou a věcnou argumentaci při řešení aplikačních matematických problémů. Učitel by měl dát žákovi dostatečný prostor a čas k vyřešení úlohy, vhodnými aktivizujícími činnostmi ho vést k pochopení základních kombinatorických pravidel a následně jejich využití k vyřešení kombinatorické úlohy. Příspěvek informuje o realizovaném výzkumu s cílem identifikovat řešitelské strategie žáků při řešení těchto úloh, zařazení kombinatorických úloh v učebnicích matematiky na prvním stupni a vytvoření aktivit pro rozvoj logicko-kombinačního myšlení žáků. Aktivity mohou být využity jako propedeutika pro pochopení základních kombinatorických pravidel a principů.

Klíčová slova: kombinatorická úloha, logické myšlení, kombinatorické principy, řešitelské strategie, aktivizující činnosti

COMBINATORIAL TASKS IN THE PRIMARY SCHOOL TEACHING

Abstract

One of the tasks of school mathematics is to develop pupils' combinatorial and logical thinking, critical reasoning and comprehensible and substantive argumentation in solving application mathematical problems. The teacher should give the pupil sufficient space and time to solve the problem, lead him / her to the basic activating activities to understand the basic combinatorial rules and then use them to solve the combinatorial task. The paper informs about realized research with the aim of identifying solving strategies of pupils in solving these problems, including combinatorial problems in mathematics textbooks at the first level and creation of activities for development of logical-combinational thinking of pupils.. Activities can be used as propaedeutic to understand the basic combinatorial rules and principles.

Keywords: combinatorial problem, logical thinking, combinatorial principles, solving strategies, activating activities

1. Úvod

Z důvodu krátkodobé pozornosti a soustředěnosti žáků prvního stupně je nutné během výuky obměňovat organizační formy i vyučovací metody a volit zejména takové, které mají na žáky aktivizující vliv. Velký důraz by měl učitel klást na motivaci a pozitivní přístup k žákům. Nejen v hodinách matematiky by měl zapojovat zajímavá témata a podporovat přirozenou hravost a spontánnost dětí. Měl by citlivě pracovat s chybami žáků a dát jim prostor pro hledání vlastních postupů a experimentování. Přínosem pro vyučování je volba aktivizujících metod, které zlepšují samotný proces výuky a činí vyučování efektivnějším. Jsou zaměřeny především na vlastní aktivitu žáků, zejména pak na rozvoj myšlení, řešení problémů a tvořivý přístup při osvojování nových poznatků. Aktivita žáků může být významně podpořena vhodnou volbou nestandardních úloh, tj. úloh, jež vyžadují určitou tvořivost, originalitu a důvtip. Oproti standardním úlohám není výchozím předpokladem využití pamětných znalostí, osvojených vzorců či algoritmů. Mezi nestandardní lze zařadit právě i kombinatorické úlohy, které jsou vhodné jak pro výborné a nadané žáky, tak i pro žáky, kteří nebývají v matematice obvykle úspěšní. Rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, kritického usuzování a srozumitelné a věcné argumentace při řešení aplikačních matematických problémů je jedním z úkolů školské matematiky. K naplnění tohoto cíle je potřeba, aby učitel poskytoval žákovi dostatečný prostor a čas k vyřešení úlohy, vhodnými aktivizujícími činnostmi ho vedl k pochopení základních kombinatorických pravidel a následně k jejich využití při řešení kombinatorické úlohy. Úspěšnost řešení úlohy je do značné míry ovlivněna výběrem zadávaných úloh. Bohužel se ukázalo, že učitelé často sami nechápou, co kombinatorickou úlohou rozumíme. Nedokážou ji identifikovat, a proto následně dochází k chybnému vedení žáka při řešení úlohy.

Kombinatorickým problémem či úlohou rozumíme takový problém, kde cílem je vytváření nejrůznějších „konfigurací a schémat“. U daných konfigurací a schémat, kdy vybíráme nějaké prvky z předem určené konečné množiny, pak musíme rozlišit, zda záleží či nezáleží na pořadí výběru. Nemusí se však nutně jednat pouze o výběr skupiny prvků, ale za kombinatorický problém považujeme i úlohu, která vede k přeuspořádání dané skupiny prvků, změně obrazce, změně útvaru apod. Kombinatorické problémy napomáhají žákům k určení výčtu prvků, stejně jako k zlepšení odhadu, zobecnění a systematického myšlení (English, 2005). Jejich úspěšné řešení závisí na pochopení:

Základních kombinatorických konceptů a modelů

- Kombinatorické operace: jedná se o kombinace, uspořádání, permutace a související pojmy, zápisy a vzorce;
- Kombinatorické modely: zahrnují model výčtu prvků (počet obyvatel, uspořádaný/neuspořádaný výčet prvků), distribuční modely (matematické simulace reálných situací a jejich aplikace) a model rozdělení do skupin (sady, podmnožiny).

Kombinatorických postupů

- Logické postupy: zahrnují klasifikace, systematické vyčíslení, princip zařazení nebo vyloučení a opakování;
- Grafické postupy: mezi běžné postupy patří stromové diagramy a grafy;
- Numerické postupy: patří sem principy sčítání, násobení a dělení, kombinační a faktorová čísla, Pascalův trojúhelník;
- Tabelární postupy: nejčastější je tvorba a využití tabulek;
- Algebraické postupy: patří sem vytváření různých funkčních vztahů a funkcí.

(Batanero, Godino et al.1997).

Za kombinatorickou úlohu považujeme každou slovní úlohu, kterou musíme řešit při použití těchto konceptů nebo modelů. Kombinatorické úlohy umožňují zažít všem žákům pocit úspěchu, který jim dodává odvahu pro další řešení a zlepšuje jejich „matematické“ sebevědomí. Pro žáky jsou tyto úlohy atraktivní. Žáci se jejich prostřednictvím mohou v matematice setkat se zajímavými problémy, jež jim poskytují možnost zkoumání, experimentování a objevování. S tím souvisí i propojitelnost matematiky s každodenním životem, se známými situacemi. Využitím zajímavých témat a námětů žáky motivujeme k řešení úloh a tím zvyšujeme i jejich zájem o matematiku.

S rozvojem kombinačního myšlení se děti setkávají již v útlém věku doma či v mateřských školách. Staví hrady z barevných kostek, rovnají předměty a hrají nejrůznější hry. Proto bychom měli navázat na jejich zkušenosti a zapojovat do výuky takové problémy a aktivity,

ISSN 2694-8133

které podporují další rozvoj kombinačního myšlení. Je to jeden z aspektů, který by se na 1. stupni neměl opomíjet. Učitelé by proto s kombinatorikou na prvním stupni ZŠ měli začít prostřednictvím manipulativních činností dětí. K tomu velmi dobře poslouží např. barevné kostky, obrázky, pastelky, aj. Je vhodné využít i osvědčených her, jako např. Logic, Tangramy, Člověče, nezlob se, Scrabble. Velkou oblibu jistě žáci najdou v hledání cest z bludišť a labyrintů (ať už v těch na papíře, či v opravdových).

2. Předmět výzkumu

Zaměřili jsme se na rozvoj logicko-kombinačního myšlení žáků primární školy. Prvotním cílem bylo provést klasifikaci kombinatorických problémů, které se vyskytují v učebnicích matematiky pro první stupeň. Souběžně jsme se soustředili na zmapování využívaných řešitelských strategií žáků a jejich schopností řešit tyto úlohy. Následně jsme si vytyčili cíl vytvořit soubor aktivizujících činností pro žáky. Předpokládali jsme, že zařazováním vhodných aktivizujících činností budou žáci schopni lépe si uvědomit hlubší souvislosti z hlediska vnímání principu (ne)uspořádání prvků s/bez možnosti opakování a tím se zvýší celková úspěšnost řešení. Záměrem bylo zlepšit schopnosti žáků v oblasti porozumění textu, zpracování vstupních informací ze zadání úlohy a propedeutika porozumění základního kombinatorického pravidla součtu a součinu.

2.1. Výzkumné předpoklady

Soustředili jsme se na tři základní oblasti, které mají vliv na úspěšnost žáků při řešení kombinatorických úloh:

a) Zkušenosti žáků
b) Práce s informacemi
c) Řešitelské strategie

Ad a) Zejména jsme předpokládali, že úspěšnost v řešení kombinatorických úloh je ovlivněna předchozími zkušenostmi žáků, které mohou žáci nabýt zejména ve škole, ale které vyplývají i z odlišných zájmů chlapců a dívek.

Například u chlapců (ve větší míře než u dívek) je více méně známá obliba skupinových sportů. Při fotbale, florbale, hokeji (a podobných) se chlapci účastní turnajů, kde se mohou seznámit s tabulkovým zápisem odehraných zápasů. Právě tato zkušenost by jim mohla pomoci při řešení kombinatorických úloh se sportovní tematikou. U dívek by se mohly při řešení úloh větší měrou projevit například zkušenosti s praktickými činnostmi z domácnosti a z běžného života (jako např. domácí práce, vaření, nakupování). Tím však netvrdíme, že chlapci s těmito činnostmi nemohou mít také bohaté zkušenosti, ani to, že dívky se nemohou účastnit sportovních turnajů. Zkušenosti s řešením kombinatorických úloh se odvíjejí i od typů úloh, které řeší ve škole, tedy v souvislosti s používanou učebnicí.

<u>Metoda ověření</u>:
Analýza učebnic matematiky pro pátý ročník. Vstupní test pro žáky (vyhodnocení řešitelských strategií). Dotazník pro učitele.

Ad b) Při řešení úloh hraje důležitou roli porozumění textu a práce s informacemi. Proto jsme se soustředili na rozvoj schopnosti žáků třídit, zaznamenávat a dále zpracovávat vstupní informace v zadání úlohy. Předpokládali jsme, že utřídění vstupních informací pozitivně ovlivňuje úspěšnost žáka při řešení úlohy.

<u>Metoda ověření</u>:
Test pro žáky - rozbor řešitelských strategií v souvislosti s úspěšně vyřešenou úlohou.

ISSN 2694-8133

Ad c) Třetí oblast našeho výzkumu byla zaměřena na rozvoj řešitelských strategií žáků. Při samostatném řešení kombinatorických úloh převládá metoda spontánního hledání výsledku tipováním a náhodným zkoušením nad metodou systematického řešení. Tipováním máme na mysli způsob, kdy žák náhodně odhadne výsledek, aniž by své tvrzení nějak písemně (nebo jinak graficky) ověřil či vysvětlil. Metoda náhodného zkoušení představuje postup, kdy žák spontánně hledá různé možnosti řešení a písemně či graficky je zaznamenává. Tyto možnosti řešení žák nalézá náhodně, nehledá je systematicky. Není tedy zcela úspěšný v nalezení všech správných možností. Rozvoj řešitelských strategií úzce souvisí s využitím obrázku či jiného grafického schématu, které mohou velmi pozitivně ovlivnit úspěšnost v nalezení správného řešení úlohy. Obrázek může vést k lepšímu pochopení souvislostí a hraje velmi důležitou roli v práci s informacemi.

Metoda ověření:
Sledování souvislostí mezi grafickým znázorněním, resp. znázornění obrázkem a úspěšností řešení v úlohách ve vstupním testu. Sledování řešitelských strategií žáků při přímém působení ve třídě. Porovnání úspěšnosti řešení s využitím grafického znázornění a bez něj.

2.2. Kombinatorické úlohy v učebnicích matematiky pro první stupeň

V roce 2012 byla provedena v rámci výzkumného šetření diplomové práce analýza učebnic matematiky pro 5. ročník ZŠ nakladatelství Alter, Didaktis, Fraus, Nová škola, Prodos a SPN. Prvky kombinatoriky se nejvíce objevují v učebnici nakladatelství Fraus: Matematika pro 5. ročník základní školy (Hejný a kol., 2011). Dále uvádíme úlohy, které je možno charakterizovat jako kombinatorické a které jsou v uvedených učebnicích zařazeny (Vilimovská, 2012). Učebnicové řady odpovídají požadavkům RVP ZV a jsou dle nich zpracované.

ALTER: Matematika pro 5. ročník, (Justová 2009)

Učebnice obsahuje aktualizované úlohy z předchozí trojdílné učebnice. Na straně 156 v kapitole Nestandardní úlohy je zařazena úloha s tématikou šachového turnaje. Cílem je zjistit počet odehraných zápasů. Správnou odpověď žáci volí ze čtyř nabídnutých možností. Úloha není nijak graficky doplněna.

- **s. 156:** Nestandardní úlohy

  7. V turnaji v šachu soutěžila dvě čtyřčlenná družstva. Každý hráč prvního družstva hrál utkání se všemi hráči druhého družstva. Kolik se odehrálo zápasů?

  Bylo odehráno: a) 8 zápasů b) 12 zápasů c) 16 zápasů d) 24 zápasů

DIDAKTIS: Matematika – učebnice pro 5. ročník základní školy (Blažková aj. 2011)

Učebnice má nevšední vzhled i pojetí matematiky. Je úzce propojena se vzdělávací oblastí Člověk a jeho svět a ukazuje matematiku jako praktický nástroj pro každodenní život. Každá kapitola obsahuje po stranách rozbor řešení daného typu úlohy krok za krokem. Pro ty, kteří se nechtějí připravit o radost z nalezení vlastního postupu, je učebnice opatřena na každé straně klopami, jež řešení zakryjí.

Prvky kombinatoriky objevíme v závěrečné kapitole Náročnější příklady pro chytré hlavičky na straně 79. V úloze o vstupenkách hledáme čísla končící dvojčíslím 31. V rýsovací úloze lze spatřit rozvoj kombinatorického myšlení, neboť je několik způsobů, jak narýsovat čtyřlístek dle vzoru. Na straně 81 se vyskytuje úloha s tematikou přelívání vody do lahví různého objemu. Také zde můžeme postupovat různými způsoby a řešit úlohu experimentem.

- **s. 79:** Náročnější příklady pro chytré hlavičky

  Na školní ples bylo prodáno 530 vstupenek (vstupenky byly číslovány 000, 001, 002,…). Při losování vyhráli 333 Kč všichni ti, kteří měli vstupenku končící dvojčíslím 31. Kolik takových vstupenek vyhrálo a kolik korun pořadatelé vyplatili?

- **s. 81:**

  Máme tři lahve o objemu 8 l, 5 l, a 3 l. 8 l láhev je plná vody. Jakým způsobem odměříte 2 l, když víte, že nesmíte žádnou část vody vylít mimo nádoby.

FRAUS: Matematika pro 5. ročník základní školy (Hejný aj. 2011)

Cílem učebnice je rozvoj klíčových kompetencí. Má netradiční vzhled a hojně využívá fotografií, ilustrací a piktogramů. Obsahuje mnoho problémových úloh, mezi kterými se objevuje i několik úloh rozvíjejících kombinatorické myšlení žáků.
Na straně 14 nalezneme následující úlohy:

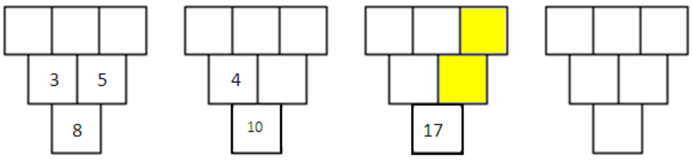
- **s. 14:** Opakování

  50. Kolik různých trojciferných čísel můžeš vytvořit z číslic:

  a) 1, 2, 3 b) 5, 4, 0 c) 5, 3, 0, 7 Každá číslice smí být použita jen jednou.

  51. Kolik různých obdélníků můžeš vytvořit z a) 12; b) 18; c) 24 čtvercových kartiček pexesa?

  52. Kolika způsoby lze doplnit sčítací trojúhelník? Nejmenší číslo není menší než 0.



  Součet čísel v barevných polích je 8. Součet tří čísel prvního řádku je 4 (ve čtvrtém trojúhelníku).

  53. Kolika způsoby je možné přečíst názvy planet v tabulkách?

  např.:

Z	E	M
E	M	Ě

Na straně 23 je další úloha rozvíjející kombinatorické myšlení. Prvky kombinatoriky se dále objevují na stranách 68 – 71 v kapitole Pravděpodobnost a náhoda.

- **s. 23:** Rozšiřující učivo (Zákonitosti, vztahy a práce s daty)

  s. 25.: Najdi součet všech osmi trojmístných čísel, ve kterých se vyskytují pouze číslice:

  a) 1 a 2 b) 1 a 3 c) 2 a 5

PRODOS: Matematika a její aplikace 5, 1. – 3. díl (Molnár; Mikulenková 2008)

Trojdílná sada učebnic vyšla v nové edici Modrá řada. V prvním díle kombinatorické úlohy nenalezneme. Ve druhém díle se úlohy rozvíjející kombinatorické myšlení objevují ve dvou kapitolách; poprvé na straně 18 v kapitole Logické slovní úlohy. V 1. úloze mají žáci za úkol kombinovat kusy oblečení a určit počet různých kombinací. Tato úloha je doplněna obrázky s oblečením. Ve druhé úloze je třeba zjistit, kolik ponožek musí chlapec vytáhnout z batohu, aby měl pár. Třetí úloha se zabývá uspořádáním červených a modrých vagonů takovým způsobem, aby byly vagony uspořádány symetricky. Ve čtvrté (poměrně náročnější) úloze vytahujeme kuličky ze tří různých krabic s přeházenými popisky a máme zjistit, kolik kuliček je nutno vytáhnout, abychom popisky uspořádali správně. Na 45. straně v kapitole Nestandardní úlohy je úloha, kde mají žáci přeskupovat 4 symboly všemi možnými způsoby (tedy charakter permutací). K tomu jim má pomoci obrázek těchto symbolů a tabulka s uspořádáním políček 6x4. Třetí díl učebnice Matematika a její aplikace 5 obsahuje dvě kombinatorické úlohy v kapitole Nestandardní úlohy na straně 3. V první z nich žáci zjišťují, kolik bude podání rukou, pozdraví-li se čtyři chlapci, a kolik podání rukou přibude, přidají-li se k chlapcům ještě dvě dívky. Pro lepší pochopení mají žáci k dispozici obrázek s šesti různě barevnými dlaněmi. Druhá úloha se shoduje s jedinou kombinatorickou úlohou z „alterovské“ učebnice. Žáci mají určit počet odehraných zápasů v šachovém turnaji, úloha je doplněna (na rozdíl od Alteru) obrázkem. V učebnici se objevila i kapitola Úlohy z přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia, žádnou kombinatorickou úlohu však neobsahuje.

2. díl:

- **s. 18:** Logické slovní úlohy

  1. a) Věrka si vzala na dovolenou 2 sukýnky, 2 kalhoty a 5 halenek. Kolika různými způsoby se může obléknout?

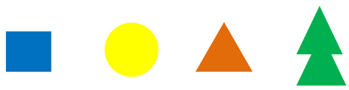
  1. b) Pavlína má s sebou 3 kalhoty a 7 triček. Která z dívek si může obléknout více různých kombinací oblečení?

  2. Nepořádný Vilík má v batohu 2 páry modrých, 2 páry hnědých a 2 páry černých ponožek. Kolik ponožek má v batohu? Jaký nejmenší počet ponožek musí potmě z batohu vytáhnout, aby měl 1 pár ponožek téže barvy? A když potřebuje 2 páry?

  3. Lokomotiva táhne 6 vagonů, každý z vagonů je buď červený, nebo modrý. Pořadí barev jednotlivých vagonů je přitom stejné zepředu jako zezadu. Kolik takových vláčků umíte nakreslit?

  4. Máš 3 plné krabice kuliček. Jsou označeny nálepkami: bílé, červené, bílé a červené. Nálepky označují barvu kuliček, které jsou v krabicích. Jednoho dne ti někdo nálepky přemístí tak, že žádná není na správné krabici. Kolik kuliček musíš z krabic bez nahlížení vyjmout, abys mohl správně uspořádat popisky?

- **s. 45**: Nestandardní úlohy
  1. Jak lze seřadit následující 4 symboly? Nakresli všechny možnosti.



(+ tabulka 6 x 4)

3. díl:

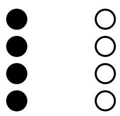
- **s. 3:**Nestandardní úlohy

  1. Bohouš, Libor, Pepík a Standa se vítají a podávají si ruce.

  a) Kolik je to celkem podání rukou?

  b) Kolik podání rukou přibude, přijdou-li za nimi Věrka a Pavlína?

  2. V šachovém utkání hrají proti sobě dvě čtyřčlenná družstva. Každý šachista jednoho družstva hraje s každým hráčem druhého družstva. Kolik partií se sehraje?



- **s. 57:** Úlohy z přijímacích zkoušek na víceletá gymnázia

  Neobsahuje žádné kombinatorické úlohy.

ISSN 2694-8133

SPN: Matematika pro 5. ročník ZŠ (Vacková aj. 2010)

Učebnice obsahuje dvě kombinatorické úlohy, vždy v kapitole Chytrost nejsou žádné čáry. První z nich najdeme na straně 72. Žáci mají zadané datum a jeho ciferný součet a mají uvést různá data, jejichž ciferný součet je shodný. Hrají si tedy se součtem čtyř cifer. Druhá kombinatorická úloha je na straně 109. Zde je k dispozici tabulka s uspořádáním polí 3x3. Žáci mají vytvářet různá čísla tak, že z každého sloupce a každého řádku použijí vždy jednu číslici.

- **s. 72:** Chytrost nejsou žádné čáry

  2. Představ si, že podle kalendáře je 24. 11. Ciferný součet tohoto data je 8 (2 + 4 + 1 + 1 = 8). Kolik dní v roce má stejný ciferný součet jako tento den? Jednotlivá data vypiš.

- **s. 109:** Chytrost nejsou žádné čáry

  2. Z cifer v tabulce sestav různá trojciferná čísla tak, že z každého sloupce a každého řádku vždy použiješ právě jednu cifru. Kolik bude celkem takových trojciferných čísel?

1	4	7
2	5	8
3	6	9

NOVÁ ŠKOLA: Uvažuj, odhaduj, počítej: Učebnice matematiky pro 5. ročník (Rosecká; Růžička 2010)

Na straně 39 v samostatné kapitole s názvem Kombinatorika, nalezneme úlohu, která má charakter permutací. Ve druhé úloze (charakter variace) řadí žáci lístečky s čtyřmístným kódem složeným ze dvou písmen (např. ABAA, BAAA, ABBB, aj.) dle abecedy a poté nahrazují písmena číslicemi. K pochopení úloh má v obou případech žákům pomoci grafický příklad (tabulka s čísly, výčet všech možností přeskupení). Za úlohu rozvíjející kombinatorické myšlení lze považovat také tu ze strany 45. Zde mají žáci různými způsoby rozměňovat částku 50 Kč na drobné mince.

- **s. 39:** Kombinatorika (Hrej si)

  1. Lukáš si hraje se čtverečky, které vyrobil z krabičky od čaje. Napsal na ně číslice. Čtverečky s číslicemi přesunuje a zapisuje si čísla složená z těchto číslic.

1 3 4 8	3 1 4 8	4 1 3 8	8 1 3 4
1 3 8 4	3 1 8 4	4 1 8 3	8 1 4 3
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

  Proveď totéž s číslicemi 2 5 7 9 nebo 4 6 8 9 nebo 1 3 5 0.
  Napsaná čísla seřaď podle velikosti. Kolik různých čísel z těchto číslic dovedeš samostatně sestavit?

  2. Anetka se rozhodla urovnat rozházené lístečky podle abecedy. Když to také dokážeš, pokračuj podle pokynů dole.

  AAAA BAAA ABAB AAAB BBAB BBAA
  BBBB ABBA BABA BABB

  AABA ABBB BAAB ABAA BBBA AABB

  Ze dvou libovolných číslic sestavuj čtyřciferná čísla tak, že na urovnaných kartách nahrazuješ písmena číslicemi. Piš je pod sebe do sloupce.

- **s. 45:**

  3. Rozměňuj peníze na drobné (vyplať různými způsoby).

ISSN 2694-8133

Na tuto analýzu jsme navázali v roce 2016-2017 v rámci řešení grantu SGS na FP TUL. Analyzovali jsme pět řad učebnic matematiky a tři učebnice rozšiřujícího učiva od různých autorů a nakladatelství uvedených v Tabulce 1, celkem se jednalo o 58 učebnic.

Tabulka 1. Učebnice, které byly předmětem výzkumu 2016–2017

Název	**Autor**	**Nakladatelství**
Matematika pro 1. - 5. ročník, 1. - 3. díl	Potůčková J., Potůček V.	Studio 1+1
Matematika pro 1. - 4. ročník, 1. - 2. díl	Cihlář J., Melichar J., Zelenka M.	Fortuna
Matematika pro 5. ročník. 1. díl	Cihlář J., Melichar J., Zelenka M.	Fortuna
Barevná matematika pro prvňáčky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro druháky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro třeťáky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro čtvrťáky	Fialová D.	SPN
Barevná matematika pro páťáky	Fialová D.	SPN
Matematika pro 1. - 5. ročník, 1. - 3. díl	Molnár J., Mikulenková H.	Prodos
Matematika pro 3. - 5. ročník, 1. - 3. díl	Blažková R., Vaňurová M., Matoušková K.	ALTER
Matematika a její aplikace pro 1. ročník, 1. - 3. díl	Mikulenková H., Molnár J.	Prodos
Zajímavá matematika pro druháky	Mikulenková H., Molnár J.	Prodos
Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky	Mikulenková H., Molnár J.	Prodos

Úlohy zařazené v těchto učebnicových řadách odpovídají typově úlohám, které uvádíme výše, proto je na tomto místě nevypisujeme. Na základě provedené analýzy učebnic matematiky jsme pro náš výzkum navrhli výchozí klasifikaci kombinatorických úloh. Jednotlivé typy úloh byly rozděleny do devíti kategorií C1 – C9 tak, jak se vyskytovaly v učebnicích viz Tabulka 2.

Tabulka 2. Klasifikace kategorií kombinatorických úloh v učebnicích

Kategorie	**Název**	**Typy úloh**
C1	Hry s čísly a písmeny	úlohy s číslicemi a vytváření čísel kombinacemi různých možností, početní operace s čísly, hledání možností pro daný výsledek, písmenné kombinace, kódování
C2	Kvantifikační a rozhodovací problémy	nejvíce, nejméně, alespoň …
C3	Sudoku a Magické čtverce	
C4	Využití teorie grafů	nalezení cesty v plánu, bludišti nebo čtvercové síti; úlohy na přelévání tekutin; úlohy na vážení; úlohy se sportovní tématikou, rozpis turnaje…
C5	Základní kombinatorická pravidla	kombinatorické pravidlo součtu a součinu, Pascalův trojúhelník v úlohách, tvorby *k*-tic z *n* prvků…
C6	Geometrické úlohy	problémy v rovině a v prostoru: dělení útvarů na části, sestavování možných obrazců z daných tvarů, barvení stěn krychlí, sirkové hlavolamy
C7	Třídící problémy	způsoby vyplacení určité částky peněz pomocí daného počtu a druhu mincí, rozdělování do přihrádek
C8	Komplexní úlohy	propojení jednotlivých prvků z úloh předchozích kategorií
C9	Kreativní úlohy	úlohy vyžadující buď vytvoření další úlohy a zadání na základě předchozí úlohy, nebo určení, co ještě můžeme ze zadaných dat vypočítat či určit

ISSN 2694-8133

Každá z těchto kategorií má potenciál rozvíjet určité oblasti kombinačního uvažování žáků. Z provedené analýzy vyplývá, že největší zastoupení mají kategorie: C1 (Hry s čísly a písmeny) a C6 (Geometrické úlohy), což je pochopitelné vzhledem k vyučovaným tématům na prvním stupni ZŠ. Mezi nejpočetnější patří kategorie C8 a C9 (Komplexní a Kreativní). Kromě kategorie C5 (Základní kombinatorická pravidla) už žádná další nepřesáhne hranici 5 % z celkového počtu všech zařazených úloh v učebnicích. Toto poměrně malé zastoupení úloh, které přirozeně rozvíjejí logicko-kombinační myšlení žáků, může být jednou z příčin nízké úspěšnosti ve výzkumech TIMSS 2011, které ukazují, že pouze minimum žáků dosáhlo průměrných výsledků v oblasti matematiky a čtení dohromady (PIRLS &TIMSS 2011). Problémem není jen malé procentuální zastoupení kombinatorických úloh v učebnicích matematiky pro první stupeň ZŠ, ale také jejich malá druhová rozmanitost. To nedává velký prostor pro potřebný rozvoj kombinačního myšlení ani žákům, ani jejich učitelům. Analýza učebnic nám umožnila lépe se zaměřit na tvorbu těch aktivit, které rozvíjejí logicko-kombinační myšlení žáků a nejsou v učebnicích matematiky využívány.

Do kategorie C1 můžeme zařadit jednak úlohy s charakterem permutací, kdy se jedná o přeskupování daného počtu prvků, resp. číslic a písmen, jednak úlohy s využitím variací. Žáci např. vytvářejí několikamístné kódy/skupiny z daného počtu prvků, např. písmen dle abecedy a dále s těmito skupinami pracují, poté nahrazují písmena číslicemi a plní další úkoly. K pochopení a vyřešení úloh může žákům v obou případech pomoci tabulka s čísly, výčet všech možností přeskupení či logický strom řešení.

Úlohy kategorie C1 můžeme proto blíže specifikovat a rozdělit do dvou podkategorií:

- **C1a** – *úlohy přeskupovací* – vytvořit čísla z daných číslic a výsledná čísla seřadit, resp. roztřídit (využití permutací a variací)
- **C1b** – *úlohy kódovací* – vytváření kódů a následné propojení s čísly

Pozn.: *Kódování jako jedna z metod řešení je vhodně využitelná při řešení řady úloh i z druhých uvedených kategorií*

Propojení obou podkategorií C1 ilustruje úloha z učebnice (Rosecká, Z., & Růžička, J., 2010), viz str. 7 kapitoly 2.2:

> *Anetka se rozhodla urovnat rozházené lístečky podle abecedy. Když to také dokážeš, pokračuj podle pokynů dole.*
> *AAAA BAAA ABAB AAAB BBAB BBAA*
> *BBBB ABBA BABA BABB*
> *AABA ABBB BAAB ABAA BBBA AABB*
> *Ze dvou libovolných číslic sestavuj čtyřciferná čísla tak, že na urovnaných kartách nahrazuješ písmena číslicemi. Piš je pod sebe do sloupce.*

Typové úlohy kategorie C2 jsou např.:

- *Bára snědla 7 bonbonů a Tereza méně. Kolik bonbonů mohla sníst Tereza?*
- *V míse bylo šest jablek a osm hrušek. Do místnosti přiběhly ze zahrady děti a z mísy si vzaly celkem sedm kusů ovoce. Zůstala v míse aspoň jedna hruška? Zůstalo v míse aspoň jedno jablko? Vypiš všechny možnosti, jaké ovoce v míse zůstalo.*

Každá z předchozích kategorií vybízí k využití víceméně jedné z nejhodnějších metod k řešení. U úloh kategorie C8 (Komplexní) žáci nepracují odděleně s čísly, symboly či objekty, ale dochází k propojení využitelných metod jako experiment, obrázek, diagram či graf, tabulkové schéma, výpis všech možností, logická úvaha, výpočet. Úlohy tohoto typu rozvíjejí

ISSN 2694-8133

ve větší míře tvořivost žáků. Žáci využívají více pravidel, postupů a různých metod řešení. Úlohy v podstatě zahrnují jednotlivé úlohy z předchozích kategorií.

Příkladem může být úloha z učebnice (Molnár, J., Mikulenková, H., 2008) viz Tabulka 1, str. 8:

Lokomotiva táhne 6 vagonů, každý z vagonů je buď červený, nebo modrý. Pořadí barev jednotlivých vagonů je přitom stejné zepředu jako zezadu. Kolik takových vláčků umíte nakreslit?

Ještě více podporují rozvoj tvořivosti žáků úlohy kategorie C9, která je početnější než předchozí. Úlohy této kategorie vyžadující buď vytvoření další úlohy a zadání na základě předchozí úlohy, nebo určení co ještě můžeme ze zadaných dat vypočítat či určit, resp. vybízejí k úvaze nad dalšími problémy v souvislosti se zadáním.

Příkladem je úloha z učebnice (Blažková, R., Potůčková, J., 2011), viz Tabulka 1, str. 8:

Do obchodu přivezli deset svetrů po 1 250 Kč, osm svetrů po 1 390 Kč, dvanáct svetrů po 899 Kč a šest svetrů po 1 050 Kč.

a) Jakou celkovou hodnotu mělo zboží, které do obchodu přivezli?
b) Během dopoledne se prodalo pět nejdražších svetrů a čtyři nejlevnější svetry. Kolik Kč za toto zboží utržili?
c) Odpoledne prodali některé z dovezených svetrů a utržili za ně 4 800 Kč. Dokážete přijít na to , jaké svetry a kolik jich prodali?
d) Jaké svetry jim po zavření obchodu večer zůstaly? Za kolik korun?

2.3. Schopnost žáků řešit kombinatorické úlohy - využívané řešitelské strategie

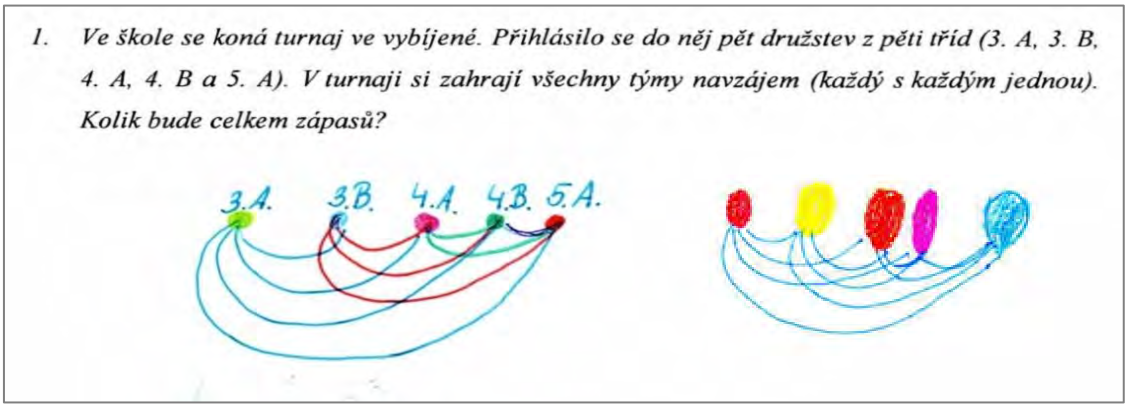
Testování žáků probíhalo v období 2016 – 2017. Zadaný test byl primárně zaměřen na určení míry úspěšnosti žáků primární školy při řešení základních typů kombinatorických úloh. Dalším výstupem testu byly informace o způsobu řešení těchto úloh. Chtěli jsme získat představu o tom, jaké strategie při řešení kombinatorických úloh žáci využívají. Testování probíhalo na šesti různých základních školách s žáky, kteří neprošli žádnou speciální průpravou k řešení kombinatorických úloh. Celkem se testování zúčastnilo 72 žáků, z toho 48 dívek a 24 chlapců. Jejich věk se pohyboval v rozmezí 10 – 11 let. Z každé školy bylo stratifikovaným výběrem vyčleněno 12 žáků. Mezi vybranými nebyli žáci se specifickými poruchami učení a vzorek byl homogenní z hlediska žákovských schopností v matematice. Test obsahoval čtyři úlohy s otevřenou odpovědí. Kompletní zadání všech čtyř úloh jsou uvedena v Tabulce 3.

Tabulka 3. Zadání testu

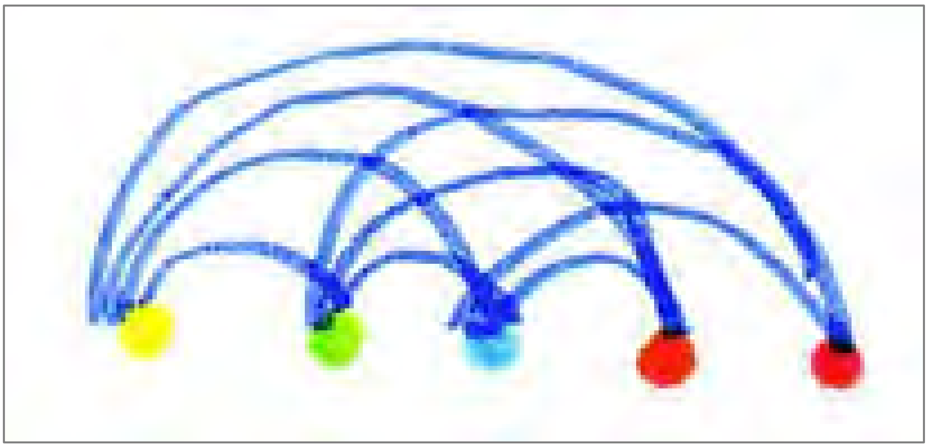
Číslo úlohy	**Zadání**
1.	Ve škole se koná turnaj ve vybíjené. Přihlásilo se do něj pět družstev z pěti tříd (3. A, 3. B, 4. A, 4. B a 5. A). V turnaji si zahrají všechny týmy navzájem (každý s každým jednou). Kolik zápasů bude celkem?
2.	Jindra má v šuplíku zelené a červené ponožky. Poslepu ze šuplíku vytáhl tři ponožky. Má jistotu, že si vytáhl dvě ponožky stejné barvy?
3.	Paní učitelka je nemocná, a proto se v pondělí mění rozvrh. Žáci budou mít tyto předměty: český jazyk, matematiku, tělesnou výchovu, anglický jazyk a hudební výchovu. Druhou hodinou určitě musí být anglický jazyk a pátou hodinou tělesná výchova. Jak může vypadat rozvrh na pondělí?
4.	Maruška má zaplatit 11 Kč. V peněžence má pouze pětikoruny, dvoukoruny a koruny. Najdi všechny způsoby, jak může tuto částku vyplatit, když mincí je hodně a může použít všechny druhy mincí, nebo jen některé.

Zadané úlohy byly vybrány na základě série pretestů, aby se omezily nežádoucí jevy, které by mohly nepříznivě ovlivnit výsledky testování. Úlohy byly kontextově odlišné a k jejich řešení se dalo využít více strategií. Typově stejné úlohy byly zadávány již v roce 2012. Identifikované řešitelské strategie byly vesměs totožné (viz ukázky řešení), stejně tak i úspěšnost žáků v závislosti na použité metodě řešení, byla srovnatelná v obou šetřeních.

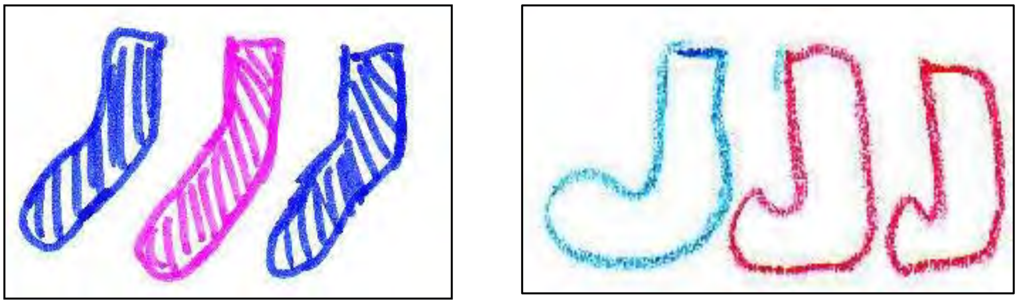
Ukázky konkrétních žákovských řešení ilustrují obrázky 1 až 9.



Obrázek 1. Řešení - SGS 2016



Obrázek 2. Řešení úlohy 1 - DP 2012



Obrázek 3. Řešení úlohy 2 - DP – 2012

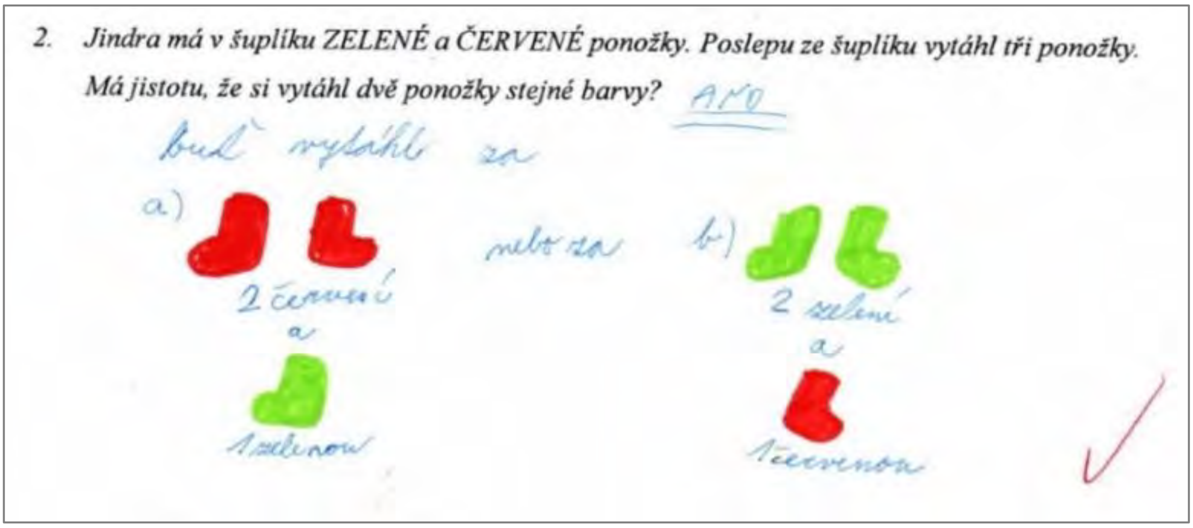
Jeden žák odpověděl: *„Ne, vytáhl dvě modré a jednu červenou ponožku.“*

ISSN 2694-8133

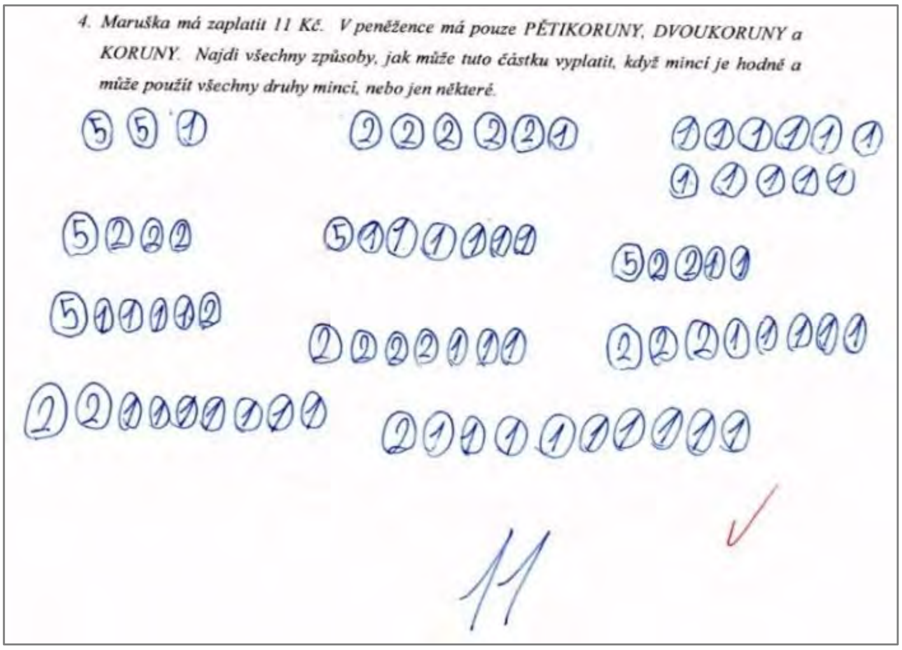
Pozn. 1: *Můžeme se domnívat, proč tento žák odpověděl ne. 1. Žák nerozuměl zadání. 2. Žák nepochopil pojem pár. 3. Žák věděl, co je pár, a proto rozhodl, že tři vytažené ponožky nejsou pár (červená ponožka mu přebývala).*

Pozn. 2: *18 žáků ze 45 nevyužilo k řešení úlohy kreslení obrázku. Úlohu řešili „úvahou“, resp. tipováním, což odpovídá výzkumnému předpokladu c), viz kap.2.1. Správně odpovědělo 11 žáků, bližší zdůvodnění však neuvedli. Tři žáci volili odpověď ne. Další dva žáci vůbec neodpověděli. U dvou zbývajících žáků byla odpověď nerozhodná: „Nevím. Je to 50 na 50.*

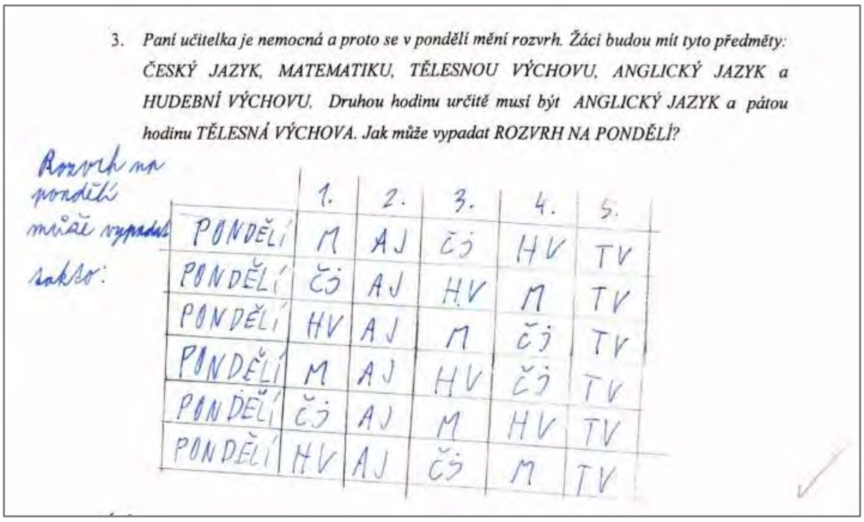
Ukazuje se však, že pro žáky je v podobných úlohách důležité propojení s reálným obrazem skutečnosti, tj. konkrétní obrázky zmíněných objektů, jako jsou např. ponožky či mince (obr. 4, obr. 5).



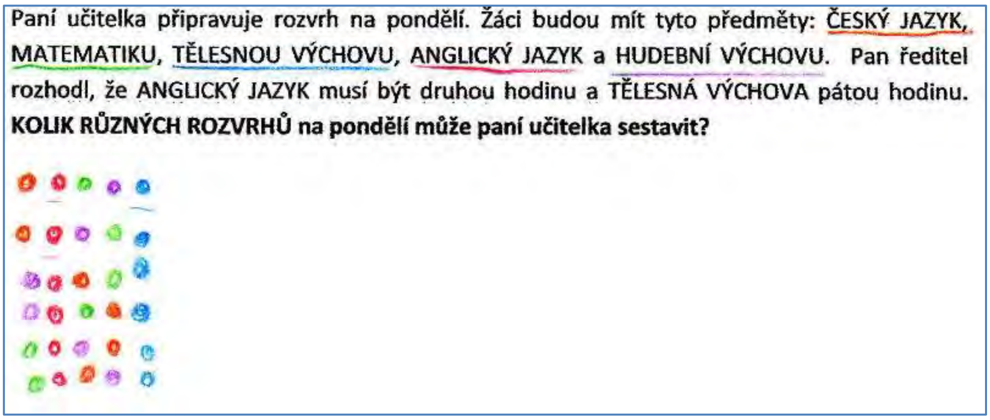
Obrázek 4. Řešení úlohy 2 - SGS 2016



Obrázek 5. Řešení úlohy 4 - SGS 2016



Obrázek 6. Řešení úlohy 3 - SGS 2016



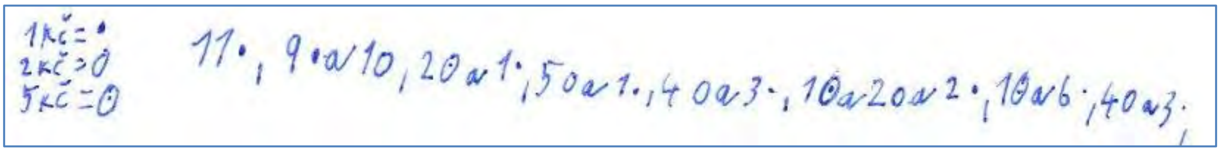
Obrázek 7. Řešení úlohy 3 - SGS 2016

Vyhodnocení dostupných dat ukazuje, že žáci volili k řešení kombinatorických úloh nejčastěji dvě metody:

- systematický zápis všech možných řešení ve formě tabulky, resp. tabulkového schématu či symbolického zápisu (obr. 3, obr. 4, obr. 5, obr. 6, obr. 7)
- diskrétní graf jako metodu grafického postupu či vizualizace dané situace (obr. 1, obr. 2)

Využití tabulky i symbolický zápis, či vizualizace ve formě obrázku jsou v podstatě různé formy metody výčtu všech možných řešení. Vizualizace je ve většině případů uplatněna formou obrázku (viz úloha s barevnými ponožkami). Naopak obr. 1 a 2 představují velmi konkrétní případ grafického postupu (znázornění), resp. vizualizace. Grafické postupy, mezi které řadíme i grafy, jsou jednou z kategorií kombinatorických postupů, které vymezují Batanero s Godinem (1997), viz str. 2. Ukazuje se, že diskrétní graf je z hlediska jeho využití již u dětí na ZŠ přijatelný a není nutno jej předem nějak blíže zavádět, resp. ukazovat. Co je velmi zajímavé z hlediska vizualizace a systematického zápisu, jsou drobné odlišnosti, které se týkají např. způsobu kódování záznamu všech možností. V řešení žáků bylo možno identifikovat buď barevné kódování (obr.7, obr. 8) nebo symbolické ve formě zavedení jistých pomocných znaků (obr. 9).

Obrázek 8. Řešení úlohy 4 - SGS 2016



Obrázek 9. Řešení úlohy 4 - SGS 2016

2.4. Dotazníkové šetření učitelů

Abychom získali ucelenější přehled o celé situaci, bylo součástí průzkumu též dotazníkové šetření zaměřené na učitele primární školy. Jeho cílem bylo zmapovat přístup učitelů základní školy k zařazování a řešení kombinatorických úloh ve výuce matematiky. Celkem se průzkumu zúčastnilo 52 učitelů, kteří vyučují na prvním stupni základní školy. Doba jejich učitelské praxe se pohybovala v rozmezí 2 až 35 let. Zapojeno bylo 7 základních škol Libereckého kraje. Dotazník byl anonymní. Obsahoval celkem šest otázek, z toho tři s uzavřenou a tři s otevřenou odpovědí. Otázky dotazníku byly zaměřeny na využívané učebnice, typy zadávaných úloh, četnost zadávání těchto úloh a metody řešení.

Z dostupných dat nebylo možné jednoznačně určit typ kombinatorických úloh, které učitelé řeší s žáky nejčastěji. Výsledky průzkumu naznačují, že volba úloh závisí především na druhu používané učebnice. Přičemž analýza učebnic ukazuje, že druhová rozmanitost kombinatorických úloh v učebnicích matematiky pro první stupeň není velká. Proto jsme se zaměřili na vytvoření souboru aktivit, z nichž uvádím ukázku jedné autorské hry. Hru vytvořila spoluřešitelka grantu SGS.

3. Kombinatorická hra - ukázka aktivity

Zahrada tulipánů

Autor: Mgr. Jana Rolečková, spoluřešitelka SGS grantu 2016–2017

Věk/Ročník	8 – 11 let / 2. – 5. ročník
Časová dotace	45 minut
Pomůcky	herní plán šachovnice 5 × 5 polí, 4 žluté, 4 zelené, 4 modré, 4 červené a 4 bílé hrací kameny, 16 kartiček s barevnými květy tulipánů a bodovým ohodnocením – 5 karet s jedním bodem, 4 karty s dvěma body, 3 karty s třemi body, 2 karty se čtyřmi body a 2 karty s pěti body
Cíl	vnímání uspořádání a opakování prvků v dané konfiguraci, rozvoj logického myšlení, rozvoj řešitelských strategií

Popis hry

Barevné kameny rozmístíme na herní plán. Pokládáme je do řady vedle sebe v tomto pořadí: zelená, modrá, bílá, žlutá, červená jako na Obrázku 10. Vždy dvě řady na krajích herního plánu jsou obsazeny kameny, prostřední řada zůstane volná. Vedle herního plánu umístíme karty lícem dolů, kde karty s jedním bodem budou navrchu a karty s pěti body úplně vespod. Každé dítě si vezme z hromádky jednu kartu (vzor barevných tulipánů). Nesmí je soupeřovi ukázat. Následně děti posouvají vždy jeden hrací kámen ve směru dopředu, dozadu i diagonálně. V tazích se děti střídají. Pokud jedno dítě táhne kamenem, může druhé dítě stejný kámen v tahu hned po soupeři posunout dál. Zakázáno je však posunout daný kámen po soupeřově tahu na původní místo, ve kterém byl před tahem soupeře.

Úkolem dětí je sestavit z hracích kamenů barevnou řadu totožnou s barevnými tulipány na kartičce. Řady se mohou na herním plánu vytvářet svisle, vodorovně i diagonálně. Když se jednomu z hráčů podaří řadu sestavit, řekne slovo „mám“ a ukáže soupeřovi kartičku i řadu na plánu, kterou sestavil, aby to mohl soupeř zkontrolovat. Poté si položí kartičku vedle sebe na lavici a vezme si další. Postupně si děti berou kartičky s odstupňovanou obtížností. Karty s jedním a dvěma body mají každou barvu tulipánu jen jednou. Karty se třemi body mají jednu barvu tulipánu dvakrát. Karty se čtyřmi body mají dvě barvy tulipánů dvakrát a karty s pěti body mají jednu barvu tulipánů dokonce třikrát. Každý hráč postupuje vlastním tempem. Na konci hry, kdy má každý hráč jednu kartu v ruce a v balíčku již žádné karty nejsou, záleží na tom, kdo jako první poslední řadu sestaví. Druhý pomalejší hráč musí následně kartu odložit, protože neplatí a do celkového počtu se nezapočítává. Děti si sečtou body na kartičkách. Vyhrává hráč s vyšším počtem získaných bodů.

Obrázek 10. Herní plán pro hru „Zahrada tulipánů“ (začátek hry)

Motivační pohádka

Budu vám vyprávět příběh o jedné daleké zemi, ležící na břehu moře. Studené vody Severního moře omývají její břehy a šplouchají na pobřeží v podobě blankytných vlnek. Na pevnině se zde rozprostírají široké lány polí, lesů a zahrad. Příroda je tu čistá a nádherná.

ISSN 2694-8133

Silný a studený západní vítr roztáčí kola větrných mlýnů, a kam se lidské oko podívá, leží pestrobarevné zahrady různorodých tulipánů. Lidé se tu věnují zemědělství, chovu dobytka a výrobě dřeváků. Vyrábí také lahodné sýry, které nikde jinde ve světě nenajdete. Ptáte se, o jakou zemi se jedná? Jistě, je to Holandsko. A v této zemi se odehrává naše vyprávění.

Král této mírumilovné země měl velmi rád krásu rozkvetlých tulipánů. Jeho královské zahrady se mohly pyšnit nejrůznějšími druhy a barvami těchto jarních květin. Rád se procházel mezi zahradami, kde každá řada tulipánů měla jinou barvu. Byly rudě červené, pomněnkově modré, zlatavě žluté, smaragdově zelené i bílé jako první sníh. Za ranních východů slunce či za pozdních teplých večerů brouzdal mezi záhonky, obdivoval nesmírnou krásu tulipánů a vdechoval jejich rozmanitou vůni. Víte, kdo se o všechny tyto květiny musel starat, aby krásně kvetly? To se ví, přeci mnoho šikovných zahradníků.

Jednoho teplého dne, když se tak král procházel zahradami, napadlo ho, že by bylo jistě velmi nádherné, kdyby se barvy tulipánů mezi sebou v barvách duhově promíchaly. „Mít každou řadu jedné barvy, to už se mi nelíbí," pomyslel si. „Takhle by určitě má zahrada byla ještě krásnější." Zavolal si všechny zahradníky a poručil jim, aby do královské zahrady zasázeli řady tulipánů v co nejvíce barevných kombinacích. Kdo bude pracovat nejrychleji a jeho práce bude odpovídat požadavkům krále, stane se vrchním zahradníkem a jeho sláva bude známa po celém Holandsku.

4. Závěr

Výzkum byl zaměřený na rozvíjení logicko-kombinačních schopností žáků primární školy. Vycházeli jsme přitom ze širokého spektra převážně zahraničních studií, které se touto problematikou zabývají. Analýza dotazníku pro učitele ukázala na určitou korelaci mezi četností zařazování kombinatorických úloh a učebnicemi, které učitelé při výuce využívají. Je zřejmé, že učitelé využívají k řešení kombinatorických úloh s žáky v podstatě tři metody: výčet prvků, logickou úvahu spolu s grafickou reprezentací a strategii pokus - omyl. Testování žáků odhalilo, že žákovská řešení se pohybují od náhodného výběru položek až po systematické řazení výběru položek, což odráží rostoucí sofistikovanost v postupu žákovských řešení. Zjištěné výsledky nám umožnily lépe se zaměřit na tvorbu takových aktivit, které nejsou v učebnicích matematiky ani učiteli běžně využívány a jsou v souladu s konstruktivistickým pojetím budování nových poznatků. Důvodem pro zařazování nestandardních aplikačních úloh (a tedy i kombinatorických) je i výskyt podobných úloh v matematických soutěžích. Pro žáky 5. ročníku může být velkým motivačním faktorem např. soutěž Klokánek (Cvrček). Zde je velký prostor věnován právě logickým, nestandardním a kombinatorickým úlohám přiměřené obtížnosti. Společně s přípravou žáků nebo následným rozborem řešení úloh může být kromě učebnic vhodným zdrojem úloh pro vyučujícího. Další důvodem k zařazování těchto úloh do výuky je i jejich výskyt v 6. ročníku. Proto je v 5. ročníku důležité tyto úlohy přípravně zařazovat, aby role nestandardních aplikačních úloh na ZŠ mohla růst.

Zjištěné výsledky byly publikovány na konferencích APLIMAT (2017, 2018) a v časopise Učitel matematiky 2017. Rádi bychom pomocí různých aktivizujících činností motivovali učitele k častějšímu zařazování kombinatorických úloh při výuce (Příhonská & Břehovský, 2018). V návaznosti na výše uvedená zjištění se chceme dále zaměřit na ověření navržených aktivit z pohledu rozvoje žákovské argumentace a systematičnosti při zpracování vstupních informací.

Literatura

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*. Volume 32, 181–199.

Břehovský, J., & Příhonská, J. (2018). The ability of primary school pupils to solve combinatorial tasks. In *Aplimat 2018, 17th Conference of Applied Mathematics Proceedings* (p. 127–137). Bratislava: Slovak University of Technology.

Břehovský, J., & Příhonská, J. (2017). Rozvíjení kombinatorického myšlení na prvním stupni základní školy. *Učitel matematiky, 25*(4), 215–231.

Břehovský, J., & Příhonská, J. (2017). Combinatorial problems of mathematics for elementary school. In: *Aplimat 2017, 16th Conference of Applied Mathematics Proceedings* (p. 206–214). Bratislava: Slovak University of Technology.

English, Lyn D. (2005). Combinatorics and the Development of Children's Combinatorial Reasoning. In: Jones, G. A (Ed.) *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning.* Springer, New York, pp. 121–141.

Příhonská, J. & Břehovský, J. (2018). *Kombinatorika v primární škole (Rozvoj logicko-kombinačního myšlení žáků*. Liberec: Technická Univerzita v Liberci.

PIRLS 2011 & TIMSS 2011. Vybraná zjištění. Česká školní inspekce. Praha 2013.

Vilimovská, L. (2012). *Aktivizující činnosti pro rozvoj kombinatorického myšlení žáků 1. stupně ZŠ*. (Diplomová práce). Liberec: FP TUL.

Analyzované učebnice v roce 2012

Blažková, J. a kol. (2011). *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Vyd. 1. Brno: Didaktis.

Hejný, M. a kol. (2011). *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus.

Justová, J. (2009). *Matematika pro 5. ročník základních škol*: *Učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Havlíčkův Brod: Alter,

Molnár, J., & Mikulenková, H. (2008). *Matematika a její aplikace: 5. ročník*, *1. díl*. Olomouc: Prodos, Modrá řada.

Molnár, J., & Mikulenková, H. (2008). *Matematika a její aplikace: 5. ročník*, *2. díl*. Olomouc: Prodos, Modrá řada.

Molnár, J., & Mikulenková, H. (2008). *Matematika a její aplikace, 5. ročník*: *3. díl*. Olomouc: Prodos, Modrá řada.

Vacková, I., Fajfrlíková, L., & Uzlová, Z. (2010). *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: SPN.

Rosecká, Z., & Růžička, J. (2010). *Uvažuj, odhaduj, počítej*: *Učebnice matematiky pro 5. ročník*. Brno: Nová škola.

Elementary Mathematics Education Journal *2019, Vol. 1, No. 1*
ISSN 2694-8133

CO MOŻE SPRZYJAĆ ROZWIJANIU UZDOLNIEŃ MATEMATYCZNYCH DZIECI W MŁODSZYM WIEKU SZKOLNYM?

Maja WENDERLICH-PINTAL
Akademia Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej w Warszawie (Poland)
maja.wenderlich@gmail.com

Abstrakt

Artykł powstał na podstawie rozprawy doktorskiej pod tytułem: Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży. Dotyczy kamieni milowych a więc wydarzeń, sytuacji, wraz z całym kontekstem, które miały związek z ukierunkowaniem umysłu w stronę matematyki. Ciekawą, a zarazem ważną informacją z punktu widzenia edukacji matematycznej oraz rozwoju zdolności matematycznych jest stwierdzenie, czy owe kamienie milowe są stałe czy zmieniają się w zależności od danego okresu. Swoje rozważania opieram o holistyczne, humanistyczne podejście oraz metodę biograficzną w ujęciu Charlotte Buhler.

Słowa kluczowe: wczesne rozwijanie uzdolnień matematycznych, kamienie milowe, bieg życia

WHAT CAN CONTRIBUTE TO THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL APTITUDES OF CHILDREN AT A YOUNGER SCHOOL AGE?

Abstract

The article was created on the basis of a doctoral dissertation entitled: Milestones in the course of life of eminent mathematicians and mathematically talented youth. It is about milestones and events, situations, and the whole context that were related to the direction of the mind towards mathematics. An interesting and important point for mathematical education and mathematical abilities can be agreement that the milestones are either constant or inconstant depending on the time. This consideration will be based on a humanistic and holistic attitude connected with Charlotte Buhler's method.

Keywords: early development of mathematical aptitudes, milestones, life course

1. Wstęp

Artykuł powstał na podstawie rozprawy doktorskiej pt. „Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży" obronionej w grudniu 2018 roku na wydziale Nauk Pedagogicznych Akademii Pedagogiki Specjalnej im. Marii Grzegorzewskiej. Promotorem była Edyta Gruszczyk-Kolczyńska.

W swoich badaniach koncentrowałam się na odnalezieniu kamieni milowych (osób, rzeczy, wydarzeń, sytuacji wraz z całym kontekstem) w życiorysach wybitnych matematyków. Uznałam, iż wiedza na ich temat może pomóc w lepszej organizacji edukacji matematycznej. Szczególnie młodszych dzieci, które dopiero rozpoczynają swoją przygodę z edukacją.

ISSN 2694-8133

Skupiłam się na czasie ostatnich około 80 lat i wyodrębniłam cztery grupy wiekowe:

- nieżyjacy wybitni profesorowie matematyki,
- żyjący wybitni profesorowie matematyki,
- doktoranci i doktorzy wydziałów matematycznych,
- laureaci olimpiad matematycznych.

Według mojego rozeznania[1] nie starano się dotąd rozpatrywać uzdolnień od strony konkretnych wydarzeń i sytuacji, które zapoczątkowały drogę kariery i przyczyniły się do osiągania nadzwyczajnych osiągnięć. Wyjątek stanowią badania Howarda Gardnera i Josepha Waltersa (J. Walters, H. Gardner, 1986) opisane w artykule: „The Crystallizing Experience: Discovering an Intellectual Gift". Autorzy definiowali doświadczenia krystalizujące jako takie wydarzenia, „które angażują w znaczące i niezapomniane spotkanie osoby o niezwykłym talencie lub potencjalnych zdolnościach z tworzywem danego pola, w którym talent ten może się ujawnić" (J. Walters, H. Gardner, 1986 za: Szmidt, 2012, s.77).

Według Gardnera i Waltersa doświadczeniem krystalizującym jest niezwykłe spotkanie - na ogół w wieku dorastania - z autorytetem z danej dziedziny twórczości bądź z jej charakterystycznym tworzywem, czy nawet sprzętem i oprzyrządowaniem, które staje się przełomowe w jego dalszym życiu. Przebieg\fakt tego spotkania skutkuje tym, iż twórcza osoba zaczyna koncertować swoje życie na wybranym problemie, tworzywie lub doświadczeniach i przeżyciach (J. Walters, H. Gardner, 1986 za: Szmidt, 2012, s.77).

Autorzy sugerują (J. Walters, H. Gardner 1986, s. 14-22), iż w przypadku największych talentów doświadczenia krystalizujące są nieuniknione, a co najważniejsze zdarzają się częściej w przypadku muzyków i matematyków. Poglądy te stanowiły inspirację w ustaleniu celu moich badań. W opracowaniu programu badań pomogła mi publikacja Charlotte Bühler (Ch. B Bühler, 1999) i zawarta w niej koncepcja metodologiczna prowadzenia badań nad biegiem życia człowieka.

Kamienie milowe rozumiem jako: „ustalone przeze mnie (lub wskazane przez samych zainteresowanych) kluczowe wydarzenia i momenty w ich historii dochodzenia do najwyższych godności i uznania w dziedzinie matematyki". Są to na przykład ważne doświadczenia w życiu człowieka, które odegrały ogromną rolę przy wyborze matematyki jako kierunku dalszego rozwoju, lub utwierdziły w przekonaniu, że matematyka jest odpowiednim wyborem.

2. Program badań

Nie udało mi się zbudować hipotez, gdyż nie odnalazłam badań, które wskazywałyby na rozwój uzdolnień od strony konkretnych wydarzeń bądz sytuacji (czynników sprzyjających). Dlatego też zastosowałam indukcyjną strategię badań.

Biorąc to wszystko pod uwagę sformułowałam natępujące cele i zadania badawcze:

I. Cel badawczy: Ustalenie korzystnych wydarzeń, które zapisały się w świadomości wybitnych matematyków i znacząco zaważyły na ich osiągnięciach naukowych.

[1] Opisuję to szerzej w artykule „Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży" [w:] Człowiek, niepełnosprawność, społeczeństwo, wyd. Akademia Pedagogiki Specjalnej, Warszawa 2019 (w druku), oraz w artykule: The milestones in the life course of distinguished mathematicians and mathematically gifted adolescents [w:] Didactica Mathematicae, wyd. Polskie Towarzystwo Matematyczne, 2019 w druku.

Zadanie badawcze zrealizowane w obrębie pierwszego celu:

- Zadanie badawcze (1.1) Jakie kamienie milowe, które zauważyły na rozwoju uzdolnień matematycznych, zapisały się w świadomości osób, których sukcesy naukowe przypadają na czasy powojenne do końca lat osiemdziesiątych ubiegłego stulecia?
- Zadanie badawcze (1.2) Jakie kamienie milowe, zapisały się w świadomości osób, których sukcesy naukowe zaczynają się od lat 60. a największe sukcesy w naukach matematycznych osiągnęli jeszcze w poprzednim wieku?
- Zadanie badawcze (1.3) Jakie kamienie milowe zapisały się w świadomości osób, których edukacja szkolna i studia przypadały na ostatnie lata poprzedniego wieku i pierwszą dekadę nowego stulecia?
- Zadanie badawcze (1.4) Jakie kamienie milowe zapisały się w świadomości osób które wygrały olimpiady matematyczne w ciągu ostatnich dziesięciu lat, tj. których szkolna edukacja miała miejsce w tym wieku?

II. Cel badawczy: Analiza i uporządkowanie informacji zebranych w efekcie zrealizowania czterech wymienionych zadań badawczych.

III. Cel badawczy: Analiza zebranych i uporządkowanych informacji o liniach życia i kontekście wydarzeń; wyłuskanie mających wpływ na kształtowanie i rozwój uzdolnień matematycznych kamieni milowych

IV. Cel badawczy: Ustalenie okresu życia – a więc czasu, w którym badane osoby – wybitni matematycy z czterech grup – rozpoczynali działalność naukową.

3. Dobór osób badanych i sposób ich wyłaniania

Grupę badawczą na początku zawęziłam do uczonych polskich, jednakże za radą autorytetów w dziedzinie matematyki uwzględniłam również dwóch profesorów urodzonych na Słowacji, mieszkających w Czechach i jednego profesora pochodzącego z Ukrainy, uznając, że ich doświadczenia życiowe, ze względu na podobieństwo tła społecznego i kontekstu historycznego, można uznać za zbliżone.

Jeśli chodzi o dobór osob to odnośnie nieżyjących matematyków nie miałam większych kłopotów. Przyjęłam, że są to osoby wymienione w Historii Nauki Polskiej oraz Kronice Nauki Polskiej. Osoby te już wcześniej zostały przez sędziów kompetentnych uznane za wybitne.

Jeśli chodzi o grupę wybitnych profesorów matematyki wykorzystałam łańcuszek kolejnych rekomendacji i w sposób specyficzny zastosowałam metodę sędziów kompetentnych. W ten sam sposób wyłaniałam wybitnych doktorantów.

Laureatów olimpiad matematycznych wyłoniłam poprzez czasopismo „Perspektywy”, w którym tworzone są rankingi najlepszych, olimpijskich szkół. Tym sposobem powoli docierałam do osób, które wysoko klasyfikowały się w rankingach olimpijskich.

4. Uzasadnienie stosowanych procedur badawczych

W moich badaniach zastosowałam podejście biograficzne, a metodami są: analiza tekstu (dzienniki, pamiętniki, wywiady-rzeki, autobiografie) oraz wywiady narracyjne. Porządkując i interpretując wskazane informacje, tak jak już zaznaczałam, wykorzystałam wskazówki Charlotty Bühler (Ch. Bühler, 1999).

5. Kamienie milowe, które decydowały o rozwoju uzdolnień i osiągnięciach naukowych

Na podstawie zebranych materiałów oraz ich analizy2 udało mi się ustalić następujące kamienie milowe:

- osoby wspierające rozwój uzdolnień matematycznych,
- sukcesy odnoszone w szkolnej i pozaszkolnej działalności matematycznej, studiach doktoranckich, dokonania naukowe w dziedzinie matematyki,
- książki, podręczniki,
- szkolne i akademickie warunki rozwijania uzdolnień matematycznych,
- wydarzenia losowe, przypadki mające wpływ na kształtowanie się zainteresowań matematyką,
- wyjazdy i stypendia zagraniczne, rozszerzające możliwości,
- inne.

Wymienione kategorie kamieni milowych można podzielić na te, które wynikają z faktów obiektywnych i te, które pojawiły się w życiu osób bardzo nieoczekiwanie, w sposób nieformalny a jednak miały decydujący wpływ na decyzję badanych. Kamienie milowe, które wymieniłam są powszechnie znane. To co jest atrakcyjne dotyczy czasu, miejsca, umiejscowienia ich na liniach życia.

6. Podsumowanie wyników badań

6.1 Osoby znaczące a stymulacja uzdolnień

We wszystkich grupach duże znaczenie odegrały osoby znaczące. Zaobserwowałam bardzo wyraźny wpływ osób pochodzących z najbliższego otoczenia badanego (tj. rodziny, przyjaciół itp.) oraz nauczycieli, wykładowcy akademiccy, wielkie autorytety naukowe – mistrzowie.

Wszyscy badani wskazywali w biegu swojego życia osobę, bądź kilka osób (szczególnie z najbliższego otoczenia), które miały bezpośredni związek z ukierunkowaniem ich umysłu w stronę matematyki. Bardzo ważne jest, aby już we wczesnym dzieciństwie dostrzec zadatki uzdolnień matematycznych. (Gruszczyk-Kolczyńska, 2012, s. 50). Ma to zasadnicze znaczenie jeśli chodzi o wspieranie rozwoju na wczesnym etapie.

Zadatki wrodzone stanowią bazę, podstawę dla rozwoju uzdolnień. Mają również charakter ogólny i mogą się rozwijać w różnych kierunkach pod wpływem wychowania i edukacji w trakcie określonych aktywności dziecka. Efektem rozwijania i pielęgnowania zadatków wodzonych w danym kierunku jest formowanie się uzdolnień specjalnych danej dziedzinie (Gruszczyk-Kolczyńska E., 2012, s. 23).

6.2 Konkursy i nagrody – wspieranie rozwoju uzdolnień

Jednym ze sposobów jest diagnoza uzdolnień a drugim wydobywanie zdolnych dzieci przez konkursy matematyczne szkolne, międzyszkolne, olimpiady matematyczne. Z osiąganiem wysokich efektów wiąże się wielki wysiłek. Żeby temu podołać, dziecko musi mieć

[2] Opisuję to szerzej w artykule „Kamienie milowe w biegu życia wybitnych matematyków i uzdolnionej matematycznie młodzieży" [w:] Człowiek, niepełnosprawność, społeczeństwo, wyd. Akademia Pedagogiki Specjalnej, Warszawa 2019 (w druku), oraz The milestones in the life course of distinguished mathematicians and mathematically gifted adolescents, [w:] Didactica Mathematicae, wyd. Polskie Towarzystwo Matematyczne (2019) w druku.

rozwiniętą sprawczość. Poczucie sprawstwa u dzieci pełni ogromną rolę w wychowaniu domowym, przedszkolnym i szkolnym.

Drugim sposobem wyszukiwania uzdolnień wśród dzieci jest wyszukiwanie ich poprzez konkursy matematyczne.

W biegu życia badanych przeze mnie osób bardzo często pojawiała się kategoria wygranego konkursu matematycznego, który prowokował do dalszych działań w dziedzinie matematyki. Często sama świadomość wygranej powodowała satysfakcję i chęć działania w tym obszarze.

Zjawisko rywalizacji wpływało motywująco na chęć wygranej i osiąganie jak najlepszych rezultatów. W niektórych przypadkach, wygrany konkurs (związany z przypadkową chęcią uczestnictwa) wzmacniał chęć rozwijania zainteresowań. Oczywiście sprawa dotyczy matematyków, którzy mieli możliwość wzięcia udziału w tych konkursach.

Status laureata, bądź zdobycie jakiegoś medalu dawało bardzo duże wzmocnienie pozytywne. Otrzymywane nagrody były wspaniałą zapłatą za trud włożonej pracy ale także czynnikiem motywującym i potwierdzającym rzeczywiste osiągnięcia. Należy więc pamiętać, że jest to bardzo ważny składnik wspierania rozwoju uzdolnień matematycznych.

6.3 Czas rozpoczynania działalności naukowej

Kiedy analizowałam osie czasu wybitnych matematyków na przestrzeni lat zauważyłam, iż każda grupa (zaczynając od Doktorantów) coraz później zaczyna swoją karierę naukową. Wiążą się z tym pewne komplikacje na styku: rozwój umysłowy a system kształcenia. Obecnie, nie sposób ukończyć studiów przed 25 rokiem życia. Tymczasem, wybitne możliwości umysłowe w zakresie rozumowania operacyjnego na poziomie formalnym ukończy się w okolicach 30 roku życia. Pisał o tym M. Spitzer (Spitzer M., 2012, s. 202): przełomowych odkryć matematycznych i fizycznych dokonywali ludzie młodzi. Podawał różnorodne przykłady, pokazując, iż naukowcy w naukach ścisłych mogą dokonać fenomenalnych odkryć tylko w określonym wieku. Oznacza to, że na działalność naukową pozostaje jedynie pięć lat. Jest to bardzo krótki czas.

Opisana wyżej teoria ma swoje uzasadnienie w psychologii rozwojowej a dokładniej poznawczym rozwoju człowieka (Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B., 2013, s. 429–430, Trempała J., 2014, s. 21–28).

6.4 Specyficzny stosunek do autorytetów naukowych

Ciekawe jest zaobserwowane prze mnie zjawisko zanikania autorytetów. Analiza biegu życia wybitnych matematyków pokazuje tendencję stopniowego zmniejszania się wpływu autorytetów na rozwój naukowy. Tylko jeden z badanych Doktorantów wskazuje swojego naukowego mistrza, który pomógł mu w osiągnięciu jakiegoś naukowego celu. Dla wielu młodych jednak znacznie ważniejsza okazuje się sama instytucja. Mówiąc o kamieniach milowych w swoim życiu, często wskazywali wyjazdy zagraniczne, staże naukowe, konkretne ośrodki naukowe, które miały zapewnić ich naukowy rozwój. Można się domyślać, że często za sukcesem młodego człowieka stał wybitny naukowiec, który w jakiś sposób umożliwiał mu rozwój kariery zawodowej. Tymczasem młodzi Doktoranci nie wspominali o mistrzach. Przyczyną takiego stanu rzeczy z jednej strony może być brak czasu i zaangażowania profesorów, którzy pochłonięci są swoją naukową pracą i nie mają czasu na pomoc i wsparcie dla doktorantów. Z tego też względu młodzi ludzie mogą nie odczuwać naukowej wdzięczności. Z drugiej zaś strony młodzi naukowcy mogą nie dostrzegać wartości relacji, nie doceniać poświęconego im czasu oraz stwarzanych przez innych ludzi okazji do dyskusji, polemiki i naukowego rozwoju.

7. Zakończenie

Kamienie milowe, które udało mi się ustalić, mogą zostać wykorzytane w taki sposób, aby wspomóc edukację matematyczną najmłodszych. Lepsza organizacja pracy w połączeniu z wiekszą świadomością rodziców i nauczycieli może mieć duży wpływ na rozwijanie uzdolnień zadatków matematycznych. Należy o tym pamiętać.

Acknowledgements
Serdecznie dziękuję Profesor Edycie Gruzczyk-Kolczyńskiej za nieocenioną pomoc i wsparcie podczas pisania rozprawy doktorskiej. Wyniki rozprawy doktorskiej mogą posłużyć w lepszej organizacji kształcenia matematycznego dzieci i mlodzieży.

Literatura

Bühler Ch. (1999). *Bieg życia ludzkiego.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Duda R. (2014). *Lwowska Szkoła Matematyczna.* Wrocław: Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, 88–90.

Gruszczyk-Kolczyńska E. (2012). Dzieci zdolne, uzdolnione i utalentowane. In: Gruszczyk – Kolczyńska (red.) *O dzieciach matematycznie uzdolnionych.* Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era, p. 23.

Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B. (2013). *Psychologia poznawcza.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 429–430.

Spitzer M. (2012). *Jak uczy się mózg.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, p. 202.

Such J. (1969). *Wstęp do metodologii ogólnej nauk.* Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, p. 140.

Szmidt, K. J. (2012). Epifania i doświadczenia krystalizujące w biografii twórczej – próba zarysowania pola badawczego. *Teraźniejszość – Człowiek – Edukacja, tom 15, nr 4(60)*, p. 77.

Trempała J. (2014). Rozwój poznawczy In: B. Harwas-Napierała, J. Trempała (red.) *Psychologia rozwoju człowieka. Rozwój funkcji psychicznych.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 21–28.

Waliszewski W. et al. (1988). *Encyklopedia szkolna. Matematyka.* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 259–260.

Walters J., Gardner H. (1986). The Crystallizing Experience: Discovering a Intellectual Gift. In: R. J. Sternberg, J. Davidson (red.) *Conceptions of Giftedness.* New York: Cambridge University Press, 14–22.

ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL

Editorial Office: Palacký University Olomouc
Faculty of Education
Department of Mathematics

Address: Žižkovo nám. 5, 77140 Olomouc, Czech Republic

Phone: +420 58 563 5709

E-mail: emej@upol.cz

Electronic edition: http://emejournal.upol.cz/issues

Vol. 1, No. 1

ISSN 2694-8133