Jedno proste zadanie...

Ewa Swoboda

Akademia Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna
w Jarosławiu

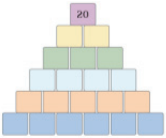
1. Wstęp

Współczesne koncepcje nauczania matematyki podkreślają, że nauczyciel nie może być „przekaźnikiem wiedzy”, a już tym bardziej – instruktorem, dostarczającym szczegółowych wskazówek postępowania, na przykład przy rozwiązywaniu zadań (Hejný & Zemanová 2013, Novotna & Sarazzy 2005, Tichá & Hošpesová 2013, Rożek 2016). Nauczanie matematyki ma przebiegać w taki sposób, aby uczeń mógł myśleć samodzielnie, aby dobierał sam sobie strategie postepowania, zgodnie z jego aktualną wiedzą i doświadczeniem. Takie postępowanie powoduje, że uczeń podczas pracy nie jest blokowany przez narzucane mu odgórnie schematy, których często nie rozumie (Rożek, 2016). Pracując samodzielnie sam dobiera sposób kodowania informacji, sam analizuje związki w zadaniu i wybiera te, które są dla niego najbardziej czytelne. Cała jego aktywność jest ukierunkowana na znalezienie rozwiązania, nie martwi się, czy obrana przez niego metoda będzie zaakceptowana przez nauczyciela. Samodzielność w rozwiązywaniu zadań (również w klasie) wspiera budowanie schematów – wykorzystanie wcześniejszej wiedzy w nowej sytuacji powoduje wzmocnienie istniejącej sieci kognitywnej, zaś dyskutowanie różnych rozwiązań pochodzących od innych uczniów powoduje, że aktualna wiedza każdego uczestnika lekcji pogłębia się, wzbogaca o nowe powiązania.

W tym opracowaniu pokażę, jak wiele niespodziewanie różnych podejść zaprezentowali uczniowie, samodzielnie rozwiązując jedno proste zadanie.

2. Organizacja pracy nad zadaniem

Uczniowie rozwiązywali zadanie o treści: W każdym rzędzie suma liczb na klockach wynosi 20. Uzupełnij liczbami pola na każdym poziomie.



Rysunek 1 *Zadanie rozwiązywane przez uczniów*

Matematyczny sens tego zadania jest oczywisty; polega na rozkładzie liczby 20 na składniki – na dwa, trzy, cztery, pięć sześć. Zadanie mieściło się w kompetencjach dzieci uczęszczających do klasy I, a już z pewnością do klasy II. Można je było potraktować jako proste zadanie rachunkowe.

Zadania posiada wiele rozwiązań, jako że liczbę 20 można rozłożyć na składniki naturalne na wiele różnych sposobów. Było ono rozwiązywane w styczniu 2018 roku, w grupie 59 dzieci, uczniów dwóch różnych klas. Uczniowie pracowali podczas dodatkowych zajęć. Nauczyciel zaprezentował zadanie i omówił jego treść, aby się upewnić, że wszyscy ją zrozumieli. Potem zadanie było rozwiązywane indywidualnie przez uczniów.

Podczas prezentowania rozwiązań okazało się, że uczniowie spontanicznie zastosowali niespodziewanie dużo strategii.

3. Strategie stosowane przez uczniów

Najbardziej prosty podział sposobów rozwiązywania zadania prowadzi do wyróżnienia dwóch strategie:

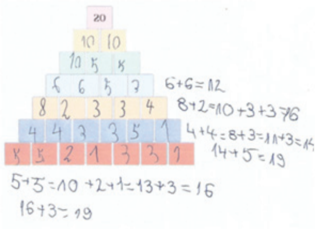
- traktowanie każdego poziomu oddzielnie;

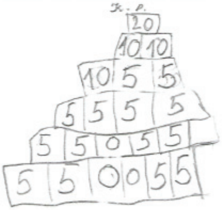
- traktowanie poziomu wyższego jako punktu wyjścia do badania poziomu niższego (rozkład kaskadowy).

Strategia: każdy poziom oddzielnie

Ta strategia pojawiała się dość sporadycznie. Uczniowie wiedzieli, że suma składników na każdym poziomie powinna wynosić 20. W ich pracy nie można było jednak zauważyć związków między wcześniejszymi rozwiązaniami (na wyższym poziomie). Bywało tak, że metodą prób i błędów starali się dopasować wpisywane wartości, by w sumie osiągnąć wartość dwadzieścia. Pokazują to rozwiązania na rysunkach 2,3,4.

W pierwszej pracy (rys. 2) uczennica najpierw wstawiała dwie liczby jednocyfrowe, a potem mozolnie dodawała kolejne składniki, zapisując obok wyniki cząstkowe. Ale byli i tacy, którzy oparli swoją pracę na świadomości, że dwadzieścia stanowi sumę dwóch dziesiątek. W zależności więc od ilości składników, grupowali liczby tak, aby kolejne 2-3 okienka dawały 10, Mogło to być 5 + 5, albo 6 + 4. Tyle, że proponowany rozkład 10 na każdym poziomie był robiony niezależnie. W prezentowanym przykładzie (rys.3) mamy: 6 + 4, 5 + 5, 2+7+1, 9 + 1, 2+2+2+3. Inną ciekawą strategię w tej grupie było operowanie jedynie 10-tkami i piątkami. W takiej sytuacji uczeń nie wychodził poza trzy składniki: 10, 5, 0 (rys.4). Tam, gdzie nie wystarczało rozbicie wartości na piątki, uczeń w okienka wpisywał 0.





Rysunek 2 Rysunek 3 Rysunek 4

Jednak w większości uczniowie starali się podchodzić do zadania tak, aby w jakimś stopniu wykorzystać to, co udało im się przeliczyć na poziomie wcześniejszym. Te „stopnie" wykorzystania wyników z poziomu wcześniejszego były bardzo różne. Omawiam tę sytuację oddzielnie.

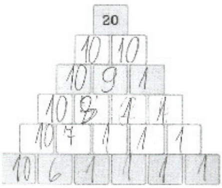
Rozkład Kaskadowy

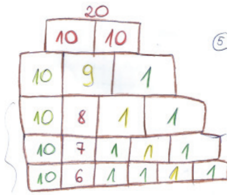
Tak nazywam strategię, gdzie uczeń w świadomy sposób nawiązywał do wyniku osiągniętego wcześniej. Tutaj dało się zauważyć cały szereg interesujących pomysłów.

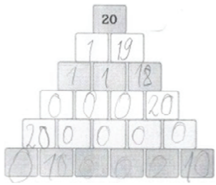
A.Wydzielenie stałej, powtarzającej się wartości. Na przykład na pierwszym poziomie uczeń rozbił 20 na dwie dziesiątki. Na niższych poziomach przepisywał 10, i zajmował się tylko rozbijaniem drugiej dziesiątki. W ten sposób zadanie stało się zdecydowanie łatwiejsze, gdyż uczeń musiał kontrolować swoje działanie w zakresie dużo mniejszych liczb.

B.Wykorzystanie składnika 1. Taka strategia często była wsparta dodatkowym wykorzystaniem powtarzającej się dziesiątki. Powiększanie ilości składników polegało na rozbiciu liczby n na dwa składniki: 1 oraz (n – 1). W takim układzie piramida stawała się w pewnym sensie symetryczna – jedna krawędź była budowana z dziesiątek, a druga z powtarzających się jedynek (rysunek 5, rysunek 6).

C.Wykorzystanie składnika 0. Po pierwszym rozkładzie 20 na dwa składniki uczeń nowe okienka każdego kolejnego poziomu uzupełniał zerami (rysunek 7).







Rysunek 5 Rysunek 6 Rysunek 7

4. Nieoczekiwane przeszkody, generowane przez tworzenie serii

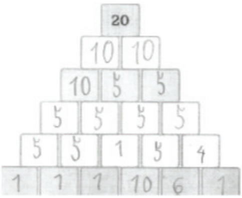
Jedna z takich przeszkód polegała na tym, że uczniowie dążyli do rozkładu na jednakowe składniki. Taka postawa pojawiała się dość często. Mogła być spowodowana zauważeniem, że na pewnym poziomie pojawiły się same piątki. Wtedy na niższym poziomie uczeń mógł eksperymentować z czwórkami (ma być więcej składników, więc wartość pojedynczego składnika powinna być mniejsza). Sukces w znalezieniu takiego „eleganckiego" rozkładu mógł prowokować do kontynuowania zauważonej regularności. Kolejną wartością poddaną badaniu było więc 3 lub 2. Czasami uczeń zadawalał się częściowym rozwiązaniem – pisał trójki tak daleko jak tylko to było możliwe, a w ostatnie okienko wpisywał wartość będącą dopełnieniem do 20tu (rysunek 8, 9).

Rysunek 8

Rysunek 9

Kolejny problem nazwałam „problem szóstego poziomu“. Między rozkładem wartości 20 na 5 składników, a tym na 6 składników pojawiła się u uczniów bariera. Do poziomu 5 składników uczeń radził sobie sprawnie, i wiązał ze sobą kolejne poziomy. Stanąwszy przed koniecznością kontynuowania pracy i wygenerowania rozkładu na sześć składników – zupełnie zmieniał strategię, szukał nowego pomysłu, często metodą prób i błędów (rysunek 11).

Czasami pokonanie takiej przeszkody było samo w sobie pozytywne. Uczeń nagle patrzył na zadanie na nowo, i odkrywał cały szereg nowych rozwiązań. Musiało to być dla niego ważne odkrycie, wymagające dodatkowego zapisu, już poza samą „piramidą” (rysunek 12).



Rysunek 11

Rysunek 12

5. Podsumowanie

Omówienie proponowanych rozwiązań okazało się ciekawsze niż samo rozwiązywanie. Dało okazję do wielu porównań, do pokazania różnorodności podejść. Te strategie były na tyle interesujące, że warto było o nich z uczniami rozmawiać. Nie zawsze uczniowie byli świadomi, że robią rzeczy warte podkreślenia, czasami wręcz traktowali je jako „uchylenie się od rzetelnej pracy". Być może podczas typowej lekcji by się one nie pojawiły. Ponieważ jednak zadania były rozwiązywane na zajęciach pozalekcyjnych, uczniowie mieli odwagę pracować „po swojemu".

Obserwując proponowane przez uczniów rozwiązania nauczyciel sam może się dużo nauczyć – tak było w moim przypadku. Pewnie największym moim dydaktycznym niedopatrzeniem było zlekceważenie znaczenia tego zadania – nie sądziłam, że może być ono tak bogate w dydaktyczne możliwości. Zaskoczeniem dla mnie było systematyczne rozkładanie wcześniejszego składnika n na 1 + (n-1). Zaskoczeniem było wykorzystanie składnika 0. A już zupełnym zaskoczeniem była przeszkoda w przejściu z poziomu 5 składników na poziom 6 składników. Rozwiązania, zaprojektowane prze uczniów potwierdziły, że nie ma takiego okresu, w którym mogę powiedzieć, że już niczego nie potrafię się nauczyć od dzieci. Wystarczy tylko pozwolić im myśleć po swojemu.

Literatura

DĄBROWSKI, M. *Pozwólmy dzieciom myśleć*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa, 2006.

GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA, E. (red.) *Edukacja matematyczna w klasie I,* CEBP 24.12 Sp. z o. o., Kraków, 2014.

HEJNÝ, M., ZEMANOVÁ, R., Vyučování orientované na budování schemat v praxi, Matematika v primárnej škole. (red.) Tomková B., Mokriš M., *Rôzne cesty, rovnaké ciele*, Prešov, 2013, s. 82-86.

NOVOTNÁ, J., SARRAZY, B., Model of a professor's didactical action in mathematics education: professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems, *Proceedings of CERME4, Sant Feliu de Guíxols, Spain – 17 - 21 February 2005*, p. 696.

ROŻEK, B. On formal and informal notation of calculation during the early learning of arithmetic by young students, *Didactica Mathematicae* 38, 149-174, 2016.

TICHÁ, M., HOŠPESOVÁ, A. Developing teachers' subject didactic competence through problem posing, *Educational Studies in Mathematics* 83(1), 2013.